Liiteluettelo
juttuun *Kirjoitushistoriani*
on kokoelma valittuja, jutussa mainittuja artikkeleita
siinä järjestyksessä, jossa ne mainitaan jutussa.
Verkosta saatavissa olevat esiintyvät vain linkkeinä.

Hannu Korhonen
Orimattila
2026-05-12

Mona Lisa ja Fibonacci *

Pisan Leonardo, jota kutsutaan myös Fibonacciksi [–na'tši], oli italialainen matemaatikko. Hän eli keskiajalla n. v. 1180–1240. Kuuluisampi Leonardo, Leonardo da Vinci [vintši], oli monipuolinen yleisnero, joka eli keski- ja uuden ajan taitteessa v. 1452 – 1519. Fibonaccin nimi esiintyy useimmiten lukujonon 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... yhteydessä. Lukujono aloitetaan luvuista nolla ja yksi sekä seuraava jäsen saadaan aina laskemalla kaksi edellistä yhteen:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n.$$

Leonardo da Vinci tunnetaan taas mm. Pariisin Louvressa säilytettävästä, salaperäisesti hymyilevää naista esittävästä taulustaan ''Mona Lisa''. Mitä yhteistä matemaatikko voi näistä taidonnäytteistä löytää?

Kultainen leikkaus

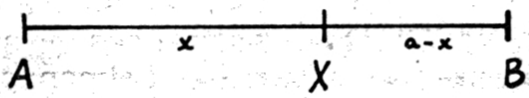
Vielä kymmenen vuotta sitten lukion matematiikan kurssiin sisältyi janan jakaminen **kultaiseksi leikkaukseksi** nimitettyyn määräsuhteeseen. Tässä tapauksessa piste X (kuva 1) jakaa annetun janan AB kahteen osaan siten, että pienemmän osan suhde suurempaan osaan on sama kuin suuremman osan suhde koko janaan:

$$\frac{XB}{AX} = \frac{AX}{AB} \text{ ts. } \frac{a-x}{x} = \frac{x}{a},$$

* Ilmestynyt myös saksaksi:
Mona Lisa und Fibonacci. Alpha 15 (1981), 6: 121–122. (Volk und Wissen, Berlin.)

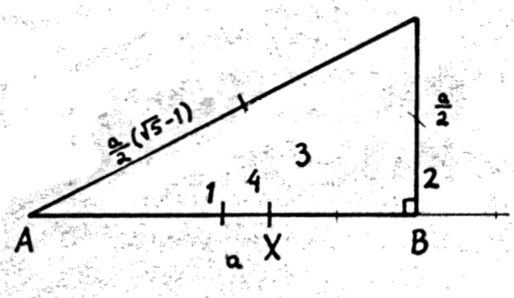
josta saadaan toisen asteen yhtälö $x^2 + ax - a^2 = 0$ ja ratkaisemalla

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{5}}{2}$$



Kuva 1: **kultainen leikkaus**

Positiivinen juuri $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ on janan suurempi osa ja sen suhde koko janaan on $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. Jana voidaan jakaa tähän suhteeseen myös geometrisesti eli harpilla ja viivaimella (kuva 2).



Kuva 2: **kultaisen leikkauksen piirtäminen**

1.**keskinormaali** (jana a/2)
2. **suorakulmainen kolmio (hypotenuusa** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$)
3. **suuremman osan piirtäminen** ($\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$)
4. **suuremman osan erottaminen (jana** AX)

Negatiivisellakin juurella on geometrinen tulkinta. Se ilmoittaa ns. ulkopuolisen jakopisteen paikan. Tässä tapauksessa suuremman osan pituus on

$$|x| = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$$

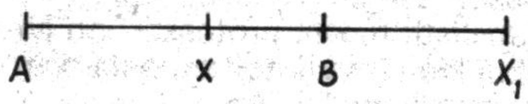
ja x:n negatiivisuus tarkoittaa sitä, että suurempi osa on janan a ulkopuolella.

Jatkuva suhde

Jos janaa AB jatketaan sen suuremmalla osalla $AX = BX_1$ (kuva 3), niin

$$\frac{AB}{AX_1} = \frac{a}{a+x} = \frac{a}{a+a(\sqrt{5}-1)}$$

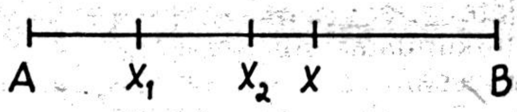
$$= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



Kuva 3: **janan jakaminen jatkuvassa suhteessa (ulkopuolinen jako)** $BX_1 = AX$ ja $\frac{XB}{AX} = \frac{AX}{AB} = \frac{AB}{AX_1}$

Siis jana AB on saadun uuden janan AX_1 suurempi osa, kun se jaetaan kultaisen leikkauksen suhteessa. Piste X_1, on janan AB ulkopuolinen jakopiste.

Jos janaa AX_1 jatketaan sen suuremmalla osalla AB, niin saadaan uusi jana AX_2, jonka piste X_1 jakaa kultaisen leikkauksen suhteeseen, ja AX_1 on sen suurempi osa. (Osoita tämä.) Jos janaa AX_2 jatketaan sen suuremmalla osalla AX_1, niin AX_2 on saadun janan AX_3 suurempi osa jne jatkuvasti.



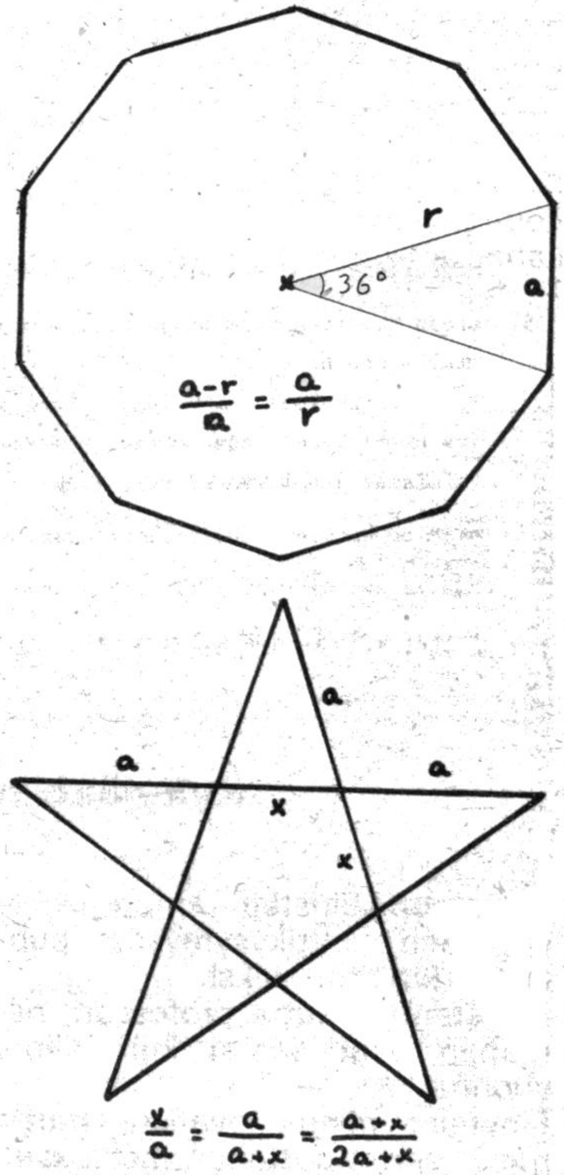
Kuva 4: **janan jakaminen jatkuvassa suhteessa (sisäpuolinen jako)** $XX_1 = XB$ **ja**

$$\frac{AX_1}{XX_1} = \frac{XX_1}{AX} = \frac{AX}{AB}$$

Jos vastaavasti jaetaan janan AB suurempi osa AX samaan suhteeseen, niin sen suurempi osa XX_1 on yhtä suuri kuin AB:n pienempi osa XB (kuva 4). Jos XX_1 jaetaan edelleen samaan suhteeseen, niin sen suurempi osa X_1X_2 on edellisen janan pienempi osa AX_1 jne jatkuvasti.

Jatkettiinpa janaa lisäämällä siihen suurempi osansa tai jaettiinpa se osiin em. tavalla, niin saadun janan suuremman osan suhde koko janaan on aina $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tästä syystä kultaista leikkausta sanotaan myös **jatkuvaksi jaoksi** ja sanotaan, että jana on jaettu **jatkuvaan suhteeseen.**

Jatkuvaan suhteeseen jaettu jana eli kultainen leikkaus esiintyy monissa geometrisissa tilanteissa. Näitä ovat esimerkiksi ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kymmenkulmion sivun suhde ympyrän säteeseen (osoita tämä!) ja viisikannan sivujan jako (kuva 5). (Tehtävä: Osoita, että säännöllisen viisikulmion lävistäjien rajoittaman, pienemmän säännöllisen viisikulmion sivu on suuremman sivun pienempi osa, kun se jaetaan jatkuvaan suhteeseen.)



Kuva 5: **ympyrän sisään piirretty säännöllinen 10-kulmio ja viisikanta**

Fibonaccin lukujen suhteet

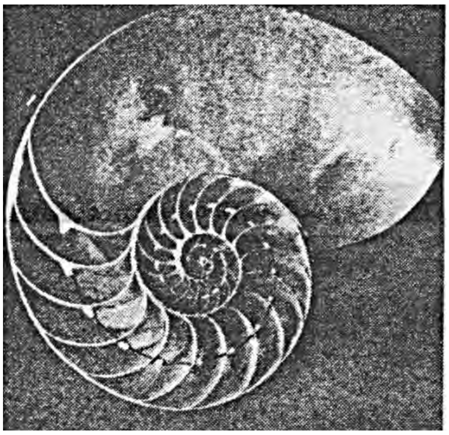
Peräkkäisten Fibonaccin lukujen suhteet, ns. Lamén sarja,

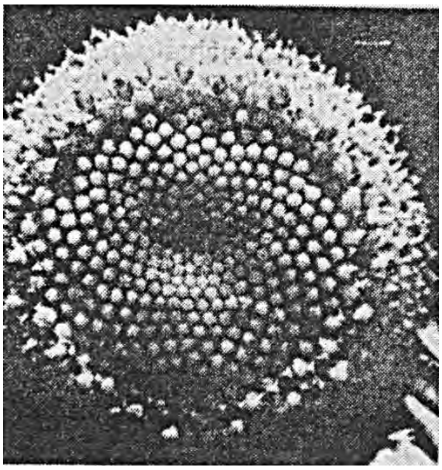
$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34} \text{ jne}$$

esiintyvät mm. monissa luonnon spiraaleissa (kuva 6). Vaikka kirjoittaisimme näkyviin näiden suhteiden muodostamaa lukujonoa hyvinkin pitkään, on vaikea — ainakin ilman oivallusta — nähdä, mitä raja-arvoa suhde lähestyy n:n kasvaessa rajatta ts. mikä on

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

(Kokeile kykyjäsi: arvioi raja-arvo, myös tarkka arvo. Kysymyksessä on nimittäin irrationaaliluku.)





Kuva 6: **luonnon spiraaleja: simpukka ja tuhatkauno**

Jos oletamme, että raja-arvo on olemassa, ja merkitsemme sitä K:lla, niin tulon raja-arvoa koskevan tunnetun lauseen mukaan

$$K^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

Supistamalla saadaan edelleen

$$K^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}.$$

Laskemalla yhteen saadaan

$$K^2 + K$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} + a_n}{a_{n+1}}$$

Koska määritelmän mukaan

$a_{n-1} + a_n = a_{n+1}$, niin
$K^2 + K = 1$,

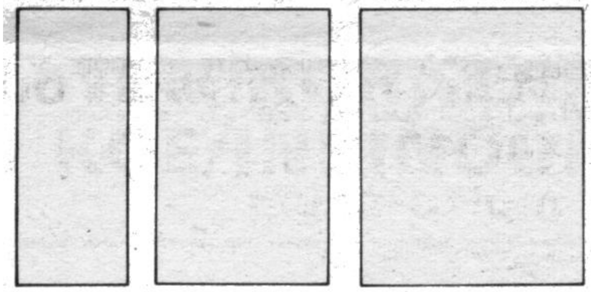
josta ratkaisemalla

$$K = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Suhde on siis sama kuin kultaisessa leikkauksessa eli janan jatkuvassa jaossa. (Kuinka lähelle oma arviosi sattui? Yritä perustella, miksi tuloksen **ei** pitäisi olla yllätys. Voitko keksiä muita lukujonoja, joilla on sama raja-arvo?) Yhtälön negatiivinen juuri $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ jätetään huomiotta, koska K on positiivinen. (Onko sillä kultaisen leikkauksen tapauksessa esiintynyttä toista juurta vastaavaa tulkintaa?)

Tätä samaa suhdetta — kultaista leikkausta —,johon nyt päädyimme toistakin tietä, käytetään rakennus- ja maalaustaiteessa pintojen jäsentämiseen ja kuvioiden mittasuhteiden määrittämiseen; erityisesti sitä on käytetty antiikin ja renessanssin aikana. Maalaustaiteessa kultaista leikkausta käytetään mm. kehon osien suhteiden hahmotteluun: esimerkiksi raajojen pituus, pään koko ja navan korkeus määräytyvät tällä tavalla (kuva 7).

Kuvio, esimerkiksi rakennuksen julkisivu tai sen osa, on sopusuhtaisimmillaan silloin, kun se rakentuu kultaisen leikkauksen varaan, esimerkiksi kuvan 8 suorakulmioista keskimmäinen. Tällainen "kultainen suorakulmio" esiintyy Mona Lisa -taulussa kahteenkin kertaan (kuva 9). Suhdetta ei siis turhaan nimitetä kultaiseksi.



Kuva 8: **suorakulmioita**

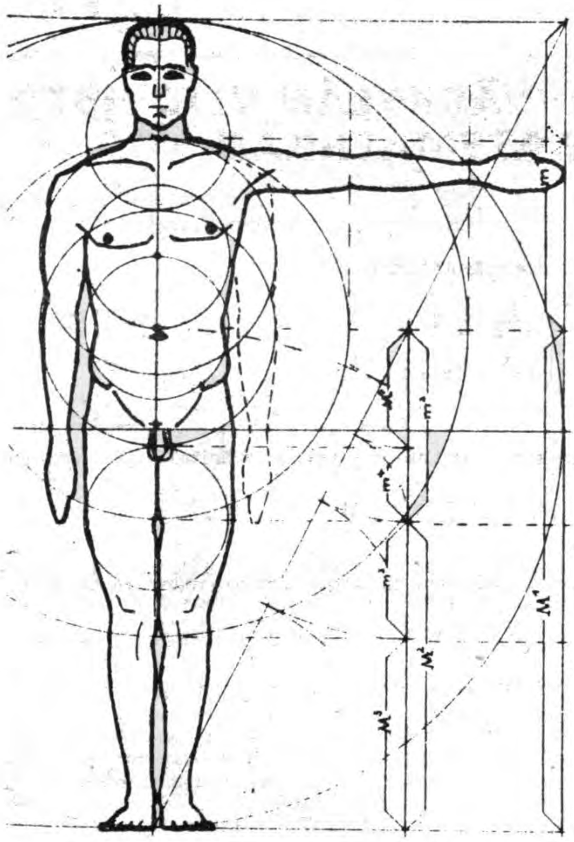
Lähteitä:

Graham, L.A.: The surprise attack in mathematical problems. Dover Publications, Inc. New York 1968.

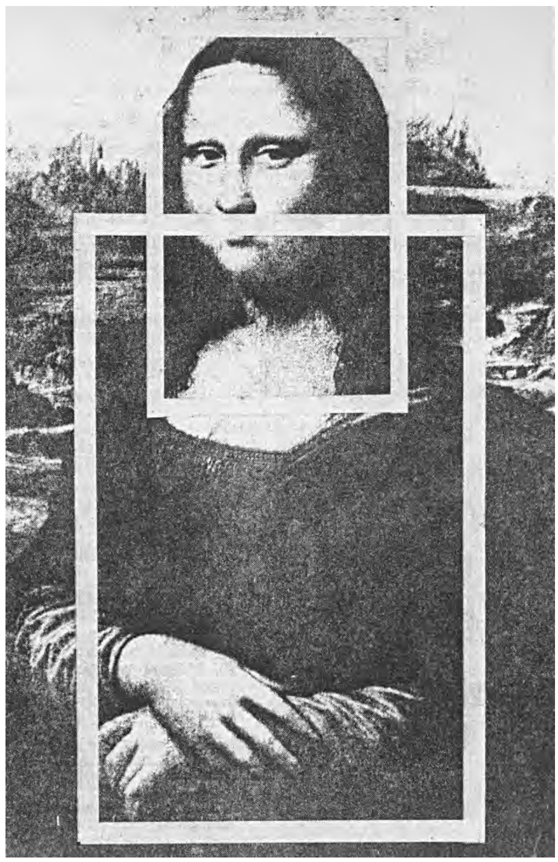
Jaxtheimer, B.W.: Suuri piirustus- ja maalauskirja. WSOY, 1964.

Watson, J.W.: Tieteiden maailma. Tammi, 1959.

Väisälä, K.: Geometria. WSOY.



Kuva 7: Kehon mittasuhteiden hahmotteiu kultaisen leikkauksen avulla.



Kuv 9: La Giogonda eli Mona LIsa

TAITEEN JA MATEMATIIKAN YHTEYKSIÄ 4

JÄRJESTYS JA JÄRJETTÖMYYS ESCHERIN TEOKSISSA

Koonnut
Hannu Korhonen

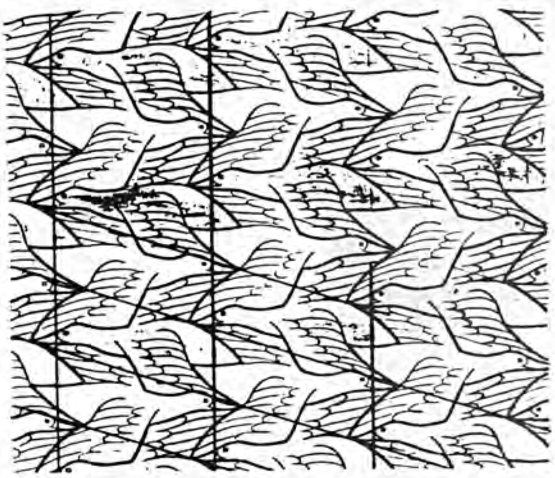
Maurits Cornelis Escher syntyi Leeuwardenissa Alankomaissa vuonna 1898. Hänen isänsä oli varakas insinööri. Escheristä piti alunperin tulla arkkitehti, mutta mieltymys mielettömyyteen ja eriskummaisuuteen teki hänestä graafikon. Kolmenkymmenen vuoden aikana hän tuotti suuren määrän puu- ja kivipiirroksia, joita kukaan ei ymmärtänyt. Elatuksekseen hän suunnitteli tuolloin aikakauslehtien kansia, postimerkkejä, tapetteja, julisteita ja kaikenlaista sekalaista. Pop-kulttuuri ja hippiliike nostivat Escherin yleisön tietoisuuteen 1950-luvulla. Hänen teoksiaan myytiin suurina sarjoina ja taloudellinen menestys oli huomattava. Taiteeksi hänen tuotantonsa hyväksyttiin vasta vähän ennen hänen kuolemaansa. Nykyään hänen töitään pidetään arvossa ja tutkitaan tarkasti.

Suuri osa hänen töistään on koottu Haagin taidemuseoon. oon.

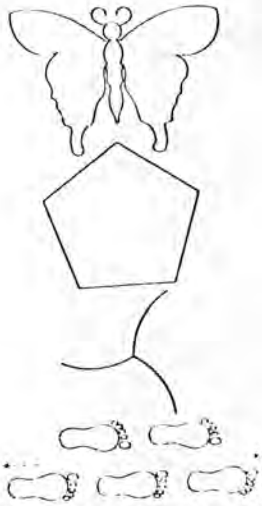
Tason peitto ja vähittäinen muuttuminen

Symmetrialla on keskeinen asema Escherin töissä. Hänen muistiinpanonsa osoittavat, että hän tutki tarkoin arabien vanhaa koristeperinnettä mm. Alhambran linnassa. Kaikki symmetriatapaukset - peilaus, kierto ja (yhdensuuntais) siirto (kuva 1) - sekä niiden yhdistelmät esiintyvät toistuvasti hänen töissään. Toteutus on kuitenkin rikas eivätkä kuviomallit ja symmetria ole itsetarkoitus. Teoksissa on usein jokin piilevä, yllättävä taka-ajatus, joka paljastuu vasta tarkemmin tutkittaessa. Vaikka suunnittelun lähtökohtana on usein yksinkertainen, samana toistuva kuvio ja siirto- ja kiertosymmetria, niin ilman apuviivoja on vaikea havaita, millainen on kuvion geometrinen rakenne (kuvat 2 ja 3). Tason peitto voi muodostua varsin monimutkaisistakin yhteen sopivista kuvioista (kuva 4).

Tason peittoon liittyy usein kuvioiden vähittäinen muuttuminen toisenlaisiksi, mikä antaa tulkinnalle ja kuvaan sisältyväile viestille aivan uutta, toisella tasolla olevaa sisältöä (kuvat 5 ja 6). "Vapautumisen" esittämien lintujen kohdalla tulkinta on ilmeinen, mutta mihin on tarkoitus johdattaa katsojan ajatukset muutoksilla, jotka lopussa palaavat alkuun (kuva 7). Perusteellisen tarkastelijan ajatukset se saa vain kiertämään samaa kehää yhä uudestaan. Ainoa todella sopiva sijoituspaikka olisi sellainen pyöreä huone, jonka ympäri todellisuudessa nelimetrinen teos ylettyisi.



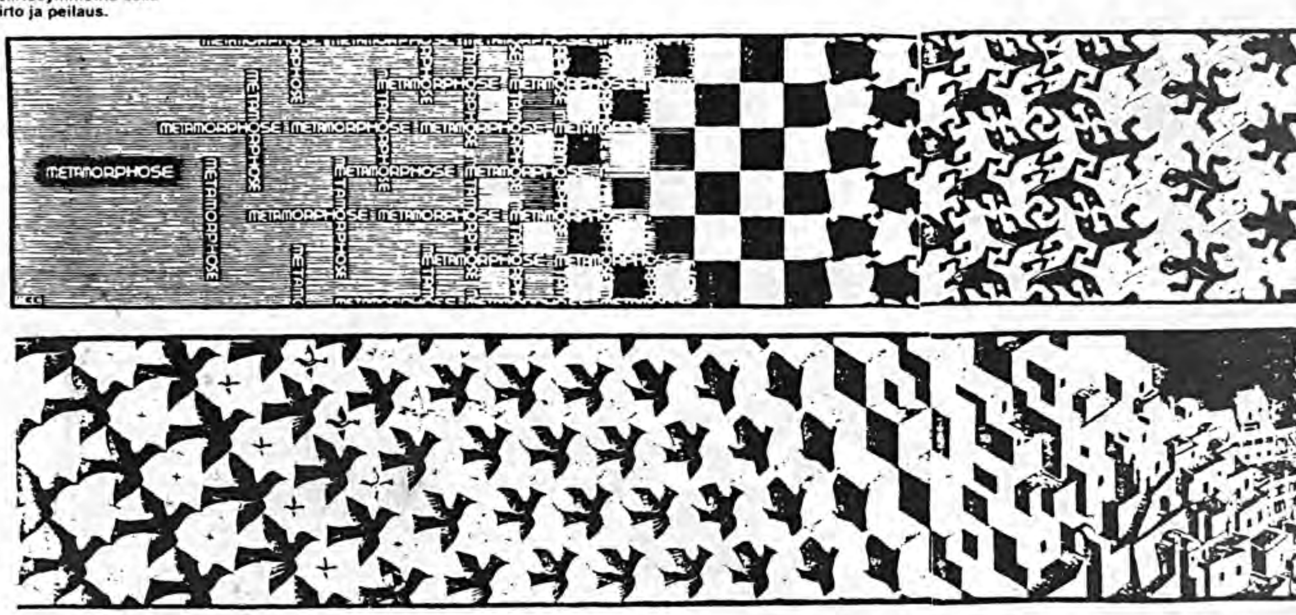
Kuva 3: Tutkielma tason peittämiseksi linnuilla. Ratkaisu tuottaa moninkertaisen siirtosymmetrian.



Kuva 1: Symmetriatapaukset a) peilaussymmetria, b) peilaus- ja kiertosymmetria, c) kiertosymmetria ja d) siirtosymmetria sekä yhdistetty siirto ja peilaus.

Kuva 2: Tutkielma tason peittämiseksi matelijoilla. Huomaa, että kuusikolmion joka toinen kärkipiste on kiertosymmetrian keskus.

Kuva 4: Tutkielma tason peittämiseksi ihmishahmoilla.



Kuva 7: Metamorfooseja I.

Kuva 5: Yö ja päivä

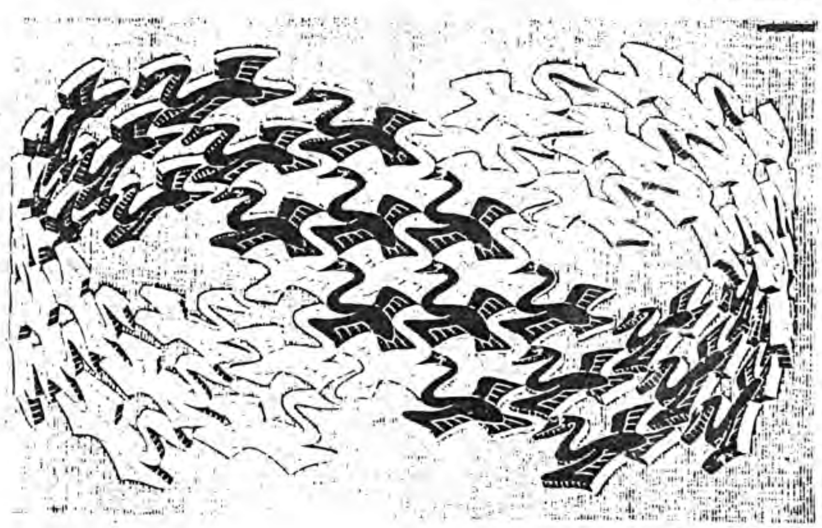
Päättymättömät ketjut ja paradoksit

Päättymätön ketju on eräs Escherin mieliaiheita. Jos tällainen ketju muodostuu kolmiulotteisiksi olioiksi muuttuvasta tason peitosta, vaikutus on uskomaton (kuva 8). Kahdeksikon muotoon piirretty ketju antaa vaikutelman vilkkaasta liikkeestä, mutta toistensa lomiin asettuvat kuviot tekevät liikkeen todellisuudessa mahdottomaksi (kuva 9).

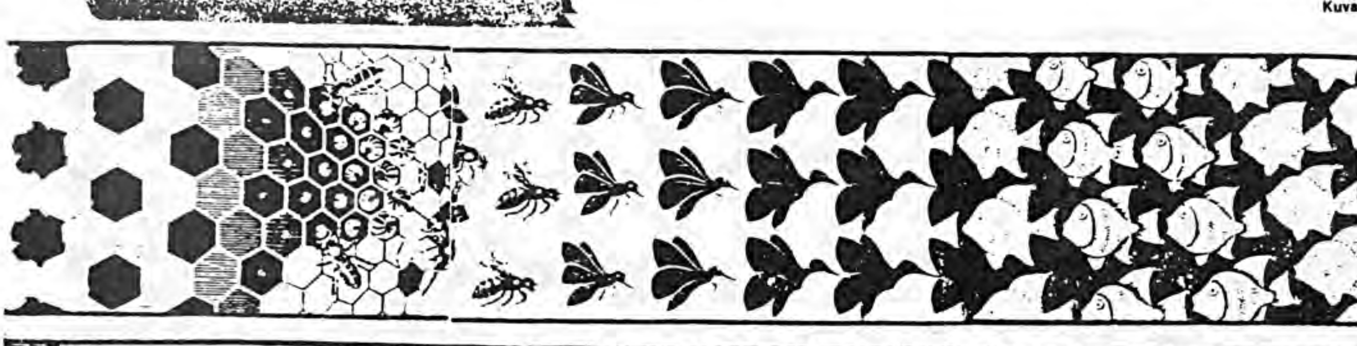
Jatkuu seur. sivulle

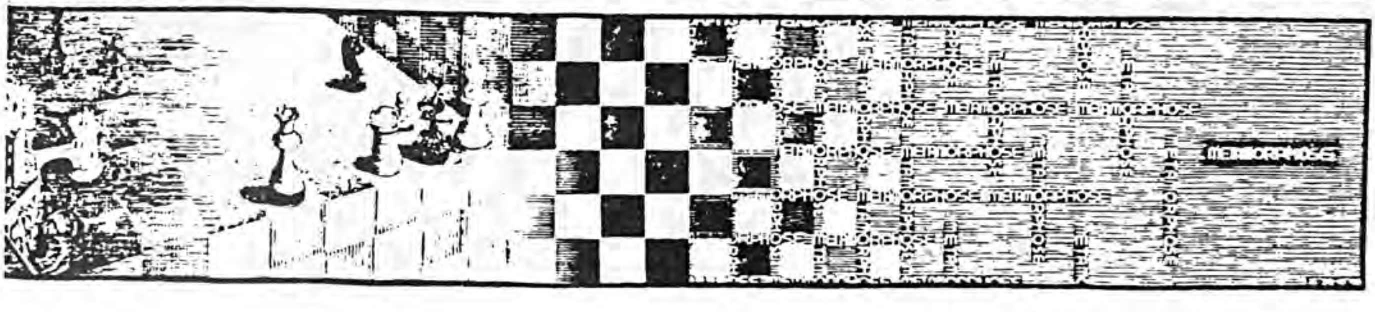
Kuva 6: Vapautuminen

Kuva 8: Matelijat.



Kuva 9: Joutsenet.



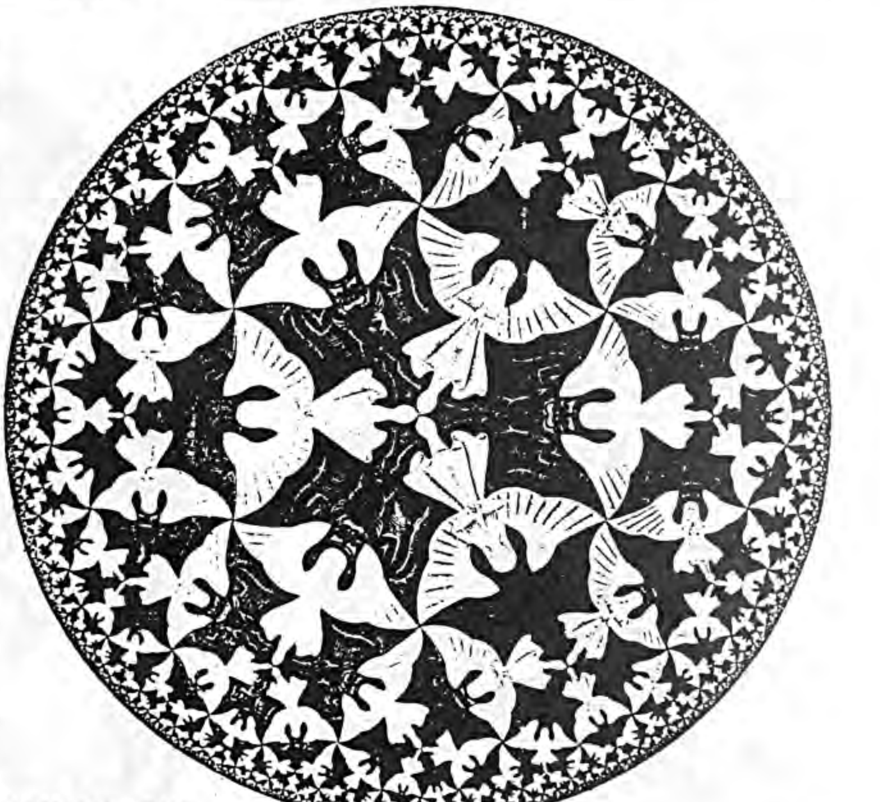


Jatkuu sivulta 3

Päättymätöntä ketjua voidaan käyttää vertauskuvallisestikin **(kuva 10)** tai se voi tuottaa mahdottomuuden, jota voi verrata vain filosofian pahimpiin paradokseihin **(kuva 11)**. Samaan aihepiiriin kuuluu kerälle kiertyen etenevä keinotekoinen eläin, joka loi itse itsensä kyllästyttyään siihen, että ei ole olemassa yhtään pyörillä kulkevaa eläintä **(kuva 12)**.

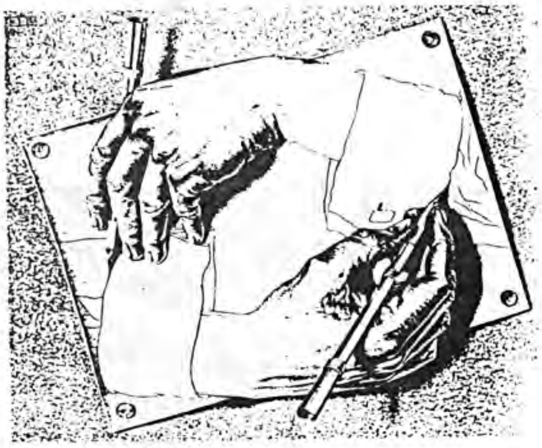
Geometriaa ja topologiaa

Escherin tiedetään olleen tekemisissä erityisesti kanadalaisen matemaatikon Coxeterin kanssa. Tältä hän sai mm. idean esittää epäeuklidisen geometrian malli omien kuvioidensa avulla. Enkeleillä ja paholaisilla täytetty epäeuklidinen taso **(kuva 13)** kuvaa hyvin etäisyyden muuttumista, kun kuljetaan keskustasta kohti reunaa. (Vertaa N. Eliön seikkailuihin epä- euklidisessa maailmassa.) Reunaa lähestyttäessä oliot ovat yhä pienempiä ja niitä on yhä tiheämmässä. Muutos on jatkuva ja eliöt säilyttävät rakenteensa ja muotonsakin, jos tutkitaan vain pientä yksityiskohtaa kerrallaan. Escherillä on monia muunnelmia tästä teemasta.



Kuva 13: Rajaympyrä IV.

Kuva 10: Yhteyden side.



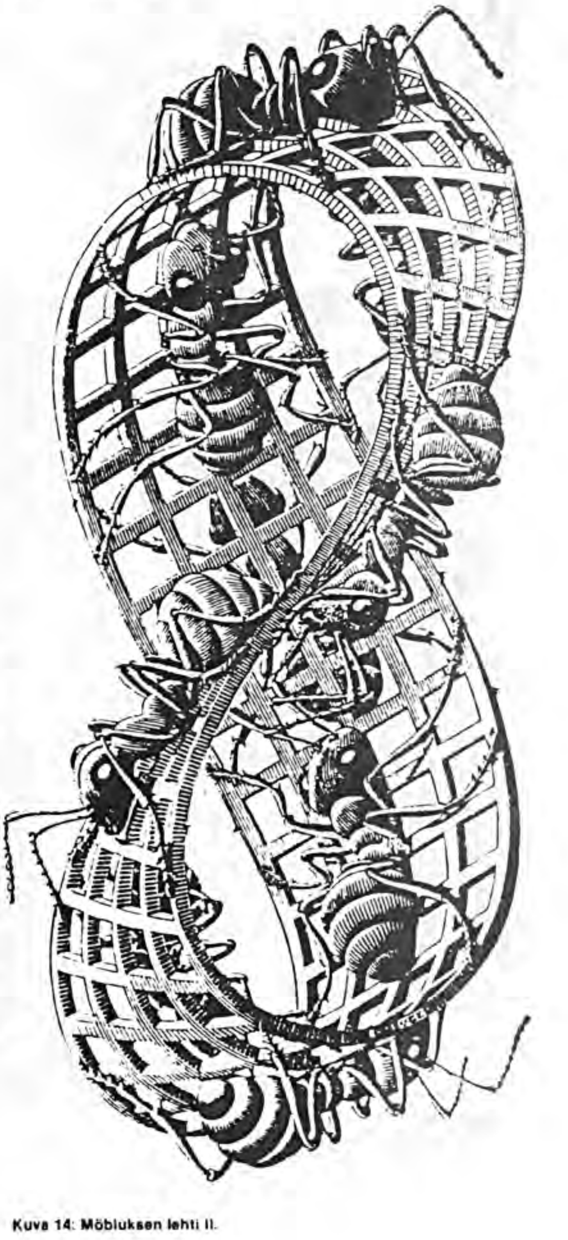
Kuva 11: Piirtävät kädet.

Toinen modernin matematiikan alalta olevista Escherin mieliaiheista on topologia. Kuvatkoon tätä aluetta Möbiuksen lehti **(kuva 14)**. Tässäkin näkyy Escherille tyypillinen jatkuvan ketjun ajatus.

Mahdottomat rakennelmat

Escher sai mahdollisuuden yhdistää mieliaiheensa ja alkuperäisen uranvalintasuunnitelmansa englantilaisen matematiikon Roger Penrosen keksimiin perspektiiviharhoihin perustuvissa teoksissaan. Mahdottomia jatkuvia ketjuja sisältyy teoksiin "Vesiputous" (kuva 15) ja "Nousu ja lasku" **(kuva 16)**. Ensisijaisesti vääriin perspektiiveihin perustuu myös sarjamme edelli-

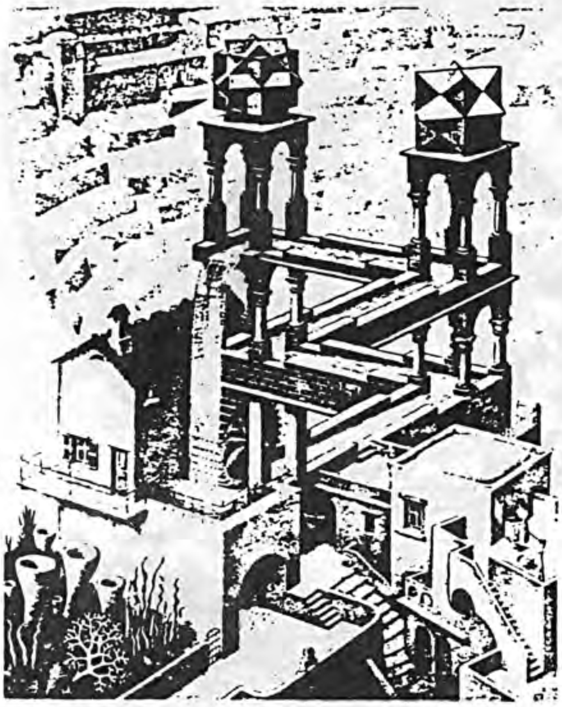
Kuva 12: Keräksi kiertyvä eläin.



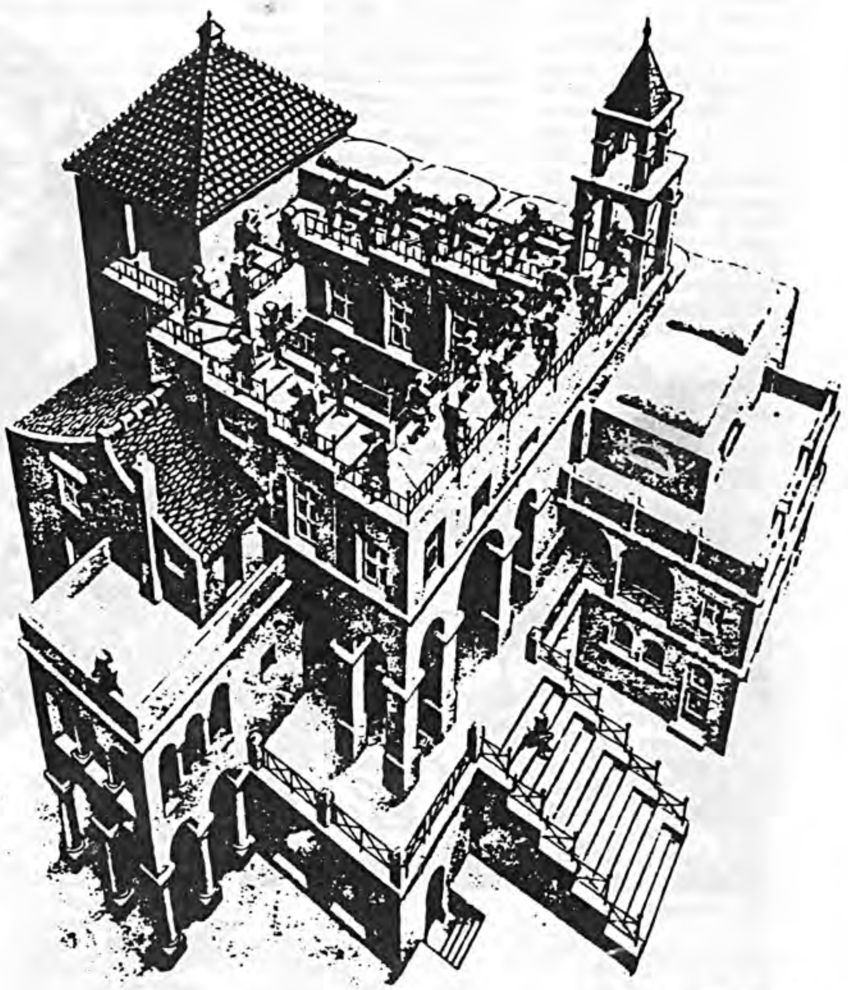
Kuva 14: Möbiuksen lehti II.

sessä osassa esiintynyt "Belvedere". Escherin geometrisen maailman monentasoista totuutta - tai valhetta - on sopivaa pysähtyä miettimään tarkastelemalla teosta "Taidegalleria" (kuva 17).

Lähteet:
Hofstadter, D. R: **Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.** Vintage Books. New York 1980.
Locher, J. L (toim.): **The World of M. C. Escher.** Haary Abrams, Inc. New York.
Steen, L. A (toim.): **Matematics Today.** Sringer Verlag. New York 1979.



Kuva 15: Vesiputous.



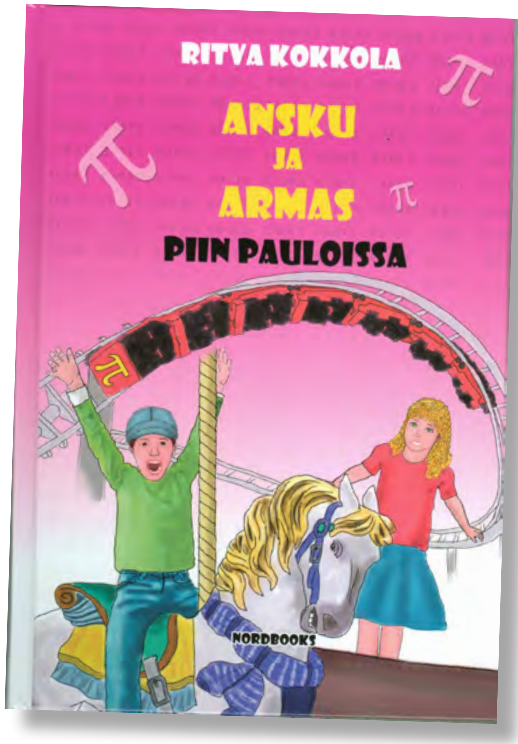
Kuva 16: Nousu ja lasku.

Kuva 13: M. C. Esher "Belveder" vuodelta 1958.

Kuva 17: Taidegalleria.

Kirjallisuutta: Lastenkirja, joka jokaisen matematiikanopettajan pitäisi lukea

Ritva Kokkola: *Ansku ja Armas piin pauloissa*. Nordbooks 2015, 134 sivua.



Matematiikkaan hurahtanut humanisti Ritva Kokkola jatkaa maanmainiota matematiikkasarjaansa. Kirja on nimellisesti lastenkirja, mutta se sisältää niin paljon sekä matematiikkaa että tekstin joukkoon piilotettua vakavaa puhetta oppimisesta ja opettamisesta, että se sopii erinomaisesti myös aikuisen luettavaksi. Vaikuttavin se varmaan olisi kuitenkin peruskouluikäisen tai matematiikkakammoisen aikuisen käsissä.

Kirja on neljäs Anskun ja Armaan seikkailuista kertova ja toinen matematiikkaan keskittyvä. Mukana kertomuksessa on myös Pii, tyttö ”kaunis kuin kukkanen tai päivänpaiste” tehtävänään kertoa piistä. Tällä kerralla suuri rooli on myös Valtakunnan Virallisella Matikkatädillä. Fantasiakirjan luonteen mukaisesti kirjan VVM on osaavampi kuin esikuvansa Matikkatäti Alli. Hän nimittäin osaa ulkoa miljoona piin desimaalia, kun todellinen Alli osaa vain yhdeksän.

Kertojana on kaksossisaruksista kuudesosatunnin vanhempi Ansku. Jostain syystä, ehkä kirjailijan mielen taka-alalla vaikuttavien perinteisten roolikuvien vuoksi, hän osaa aluksi matematiikkaa vähemmän kuin veljensä. Toinen syy voisi olla se, että näin hänellä on paremmat mahdollisuudet iloita oppimisestaan. Myönteiset elämykset ovatkin kirjassa vahvasti esillä. Yksi syy asioiden kertaamiseen voi esimerkiksi olla se, että kertaaja voi iloita osaamisestaan.

Kirjan kuvaamat tapahtumat ovat niin monipolvisia ja asiat niin monitahoisia ja -tasoisia, että varsinaisesta juonesta ei oikeastaan voi puhua. Selkeä kehyskertomus siinä kuitenkin on. Päähenkilöt suunnittelevat matematiikkahuvipuiston ja tarjoavat siellä suurelle yleisölle monenlaisia matematiikkaelämyksiä, arkipäivän matematiikkataitoja ja ”huikeita kysymyksiä, joihin viisaatkaan filosofit tai matemaatikot eivät osaa vastata”. Lopuksi Euroopan Unionin johtajat, avustajat ja muut virkamiehet kuulevat huvipuistosta ja lähettävät lobbaajia hakemaan pelastusta matematiikkapuistosta.

Aikuislukija ei voi kuin ihmetellä sitä mielikuvituksen lentoa, jolla samaan kertomukseen sidotaan sananlaskut, elämänohjeet, lainasanojen selitykset, ihmeotus äiti, piin päivä, peukuttaminen, niljakas neljäkäs, pinta-alan ja tilavuuden laskeminen, aivoille ja sydämelle sopivat eväät, Fibonaccin luvut, Einsteinin ongelma ja maailman kuuluisin yhtälö. Kirjan lopussa on vielä kymmenen ongelmaa, osa aidosti vaativia, niin että lukeminen ei riitä, vaan sen lisäksi kirjan käteensä ottanut joutuu vielä vaivaamaan aivojaankin.

Yksi kirjasta puuttuu: varoitus, että siitä voi saada matematiikkatartunnan. Ehkä se on jätetty pois tarkoituksella. Voi nimittäin olla, että sekä kirjoittajan että Matikkatädin taka-ajatuksena on aivan päinvastainen, matematiikkatartunnan levittäminen.

HANNU KORHONEN
Lehtori emeritus, Orimattila

KAOOTTISTA POPULAATIOBIOLOGIAAA

■ Eliöt pyrkivät lisääntymään ja täyttämään kokonaan ekologisen lokeronsa. Kannan voimakkaat vaihtelut saattavat näyttää sattumanvaraisilta, vaikka vaihtelun takana olisikin tarkka matemaattinen säännönmukaisuus. Tulevaisuus riippuu tässä yksinkertaisessa matemaattisessa mallissa ympäristön hyväksikäytön tehokkuutta kuvaavasta populaation kasvunopeudesta.

HANNU KORHONEN

Muikun, sopulin ja monien metsälintujen kannat näyttävät vaihtelevan täysin säännöttömästi ja selittämättömästi (kuva 1). Kyseessä saattaa olla populaation ja ympäristön säännönmukainen vuorovaikutus. Sääntöä ei ehkä kuitenkaan ole helppo keksiä lukumäärähavainnoista päättelemällä, vaikka se ei matemaattisesti monimutkainen olisikaan.

Yksinkertaisimpia matemaattisia populaation kasvumalleista on Verhulstin laki:

$k_{seur} = n \cdot k \cdot (1-k).$

Tässä k on populaation koko prosentteina suurimmasta mahdollisesta populaatiosta, jota ympäristö ravinto- yms. tekijöiden perusteella pystyy elättämään, ja k_{seur} on seuraavan sukupolven koko. Kerroin n on populaation kasvunopeus, joka sisältää ravinnon ja muiden ympäristöresurssien hyväksikäytön tehokkuuden sekä syntyvyyteen ja kuolleisuuteen vaikuttavat muut tekijät.

Kuva 1:
Sanomalehti Keskisuomalainen kertoi uutisessaan 13.8.1988 Kuhmon eräpäivien kohupuheenaiheesta. Metsokannan koko vaihtelee säännöllisesti 6–7 vuoden välein, paitsi pohjoisessa 4 vuoden välein. Vaihtelua pyrittiin selvittämään petojen ravitsemustilanteella ja metsojen ikäjakaumalla.

Syy yhä arvoitus

Metsokanta romahtanut

Matemaattisesti Verhulstin laki on muotoa ax^2+bx oleva toisen asteen polynomilauseke. Sen arvoja ei kuitenkaan lasketa tavanomaiseen tapaan, vaan sääntö on rekursiivinen. Aloitetaan mielivaltaisesta populaation koon k arvosta. Tulos, populaation uusi koko k_{seur}, sijoitetaan lausekkeeseen uudelleen k:n paikalle, lasketaan uusi k_{seur} ja niin edelleen yhä uudestaan. Esimerkiksi sadannen sukupolven koon saa selville vain laskemalla kaikki lähtöpolvea 1 seuraavat 99 sukupolvea yksi kerrallaan.

Rekursiivisella tietokonekielellä – tässä IBM-Logolla – kirjoitettu ohjelma on lyhyt:

```
TO VERHULST :NOPEUS :KOKO
   SETPOST LIST XCOR + 2 100 * :KOKO
   VERHULST :NOPEUS :NOPEUS * :KOKO * (1 – :KOKO)
END.
```

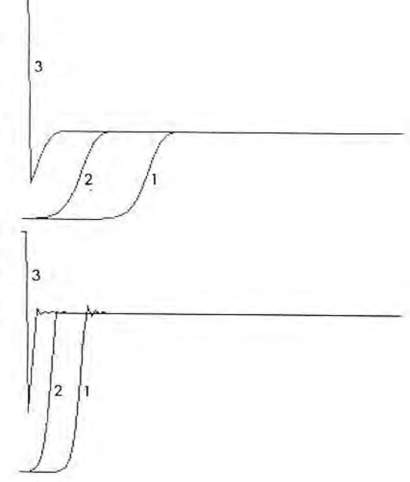
Tämä ohjelma piirtää populaation koon kuvaajan. Jos halutaan tulostaa vain populaation koko lukuina, niin rivi SETPOS... on korvattava rivillä PRINT :KOKO.

Tutkimme seuraavassa tarkemmin, miten kasvunopeus vaikuttaa populaation koon vaihteluun. Pienillä kasvunopeuden arvoilla (1,5–2,5) koko vakiintuu muutaman tai muutaman kymmenen sukupolven jälkeen tasolle, joka on sitä suurempi mitä suurempi on kasvunopeus (kuva 2). Kasvunopeuden lisääntyessä eli ympäristön resurssien käytön tehostuessa populaation koossa alkaa näkyä säännöllistä vaihtelua (kuvat 3 ja 4).

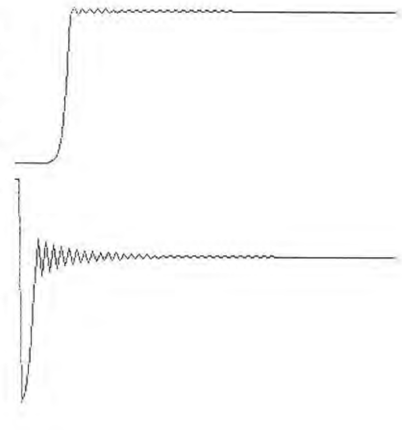
Vaihtelu käy täysin jaksottomaksi eli kaoottiseksi, kun kasvunopeus lähestyy arvoa neljä (kuva 5). Tätä suuremmilla kasvunopeuksilla malli ennustaa täydellistä katastrofia, mikä tietokoneohjelmassa näkyy siten, että ohjelma pysähtyy tekniseen virheilmoitukseen.

Funktion hajaantuminen

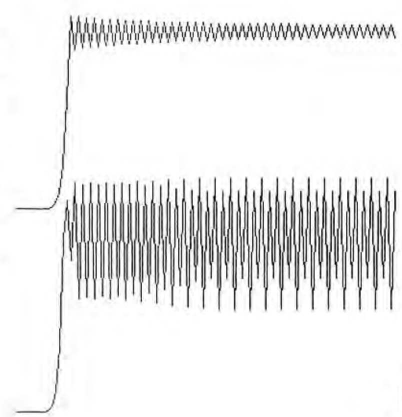
Populaation kasvuun vähitellen hiipivää kaoottisuutta on vaikea havaita seuraamalla tietyn populaation koon muuttumista jatkuvana käyränä (kuvat 2–5). Jos sen sijaan kuvaan merkitään kunkin sukupolven koko erillisinä pisteinä, (kuva 6), niin jaksollinen vaihtelu nähdään käyrän hajaantumisena.



Kuva 2:
Populaation koon kehittyminen Verhulstin lain mukaan noin sadan sukupolven aikana kasvunopeuden arvoilla 1,5 (ylemmät käyrät) ja 2,0 (alemmat käyrät). Populaatio vakiintuu ennen pitkää määräkokoon riippumatta ensimmäisen sukupolven koosta. Vakiokoko on sitä suurempi, mitä suurempi on kasvunopeus. Hitaimmin vakiintuvassa tapauksessa (käyrä 1) alussa on vain miljoonasosa suurimmasta mahdollisesta populaatiosta. Käyrä 2 vastaa aloituskokoa 0,1 prosenttia ja käyrä 3 aloituskokoa 90 prosenttia. Viimeksi mainitussa tapauksessa suuri osa eliöistä kuolee heti alussa.

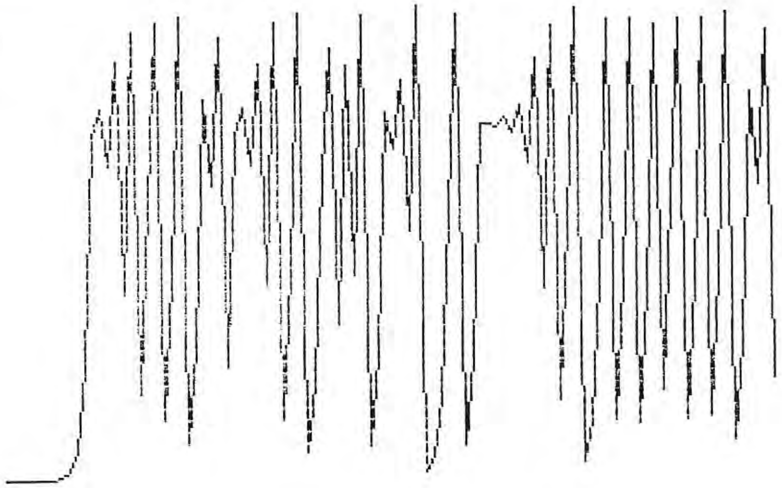


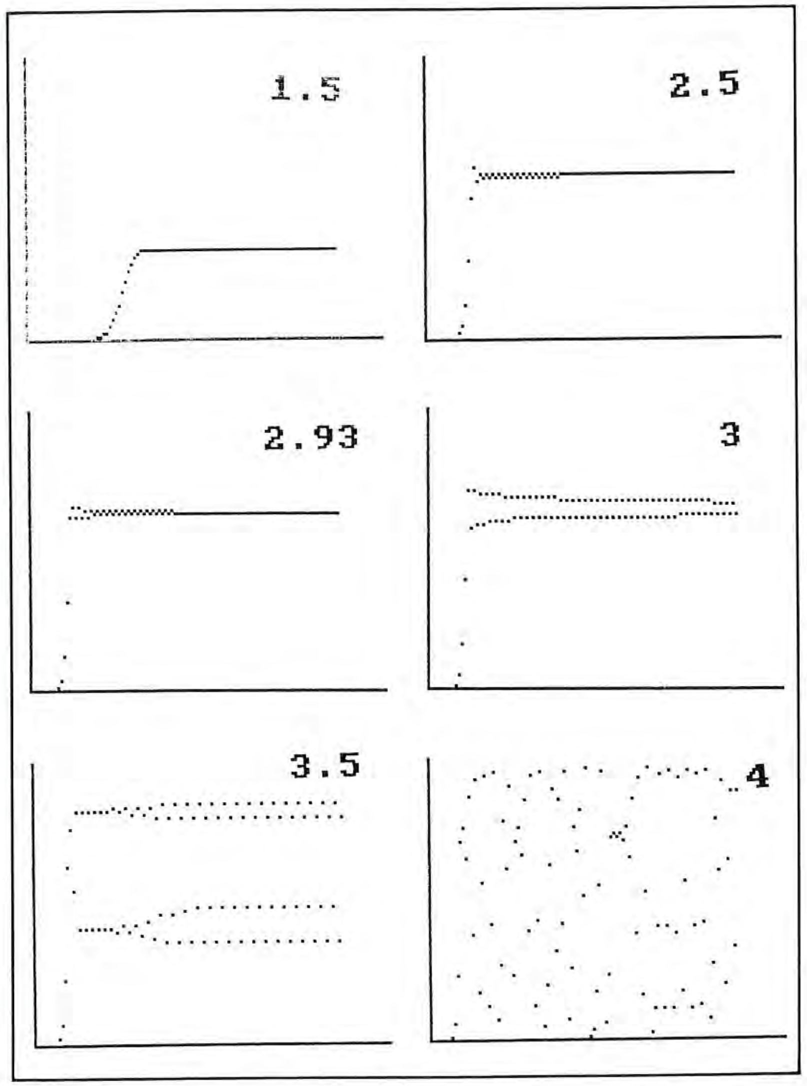
Kuva 3:
Kasvunopeuden arvolla 2,93 populaation koko vakiintuu vajaan 60 sukupolven aikana. Sitä edeltää lievä kannan suuruuden jaksollinen vaihtelu. Ensimmäisen sukupolven koko on ylemmällä käyrällä miljoonasosa ja alemmalla 90 prosenttia suurimmasta mahdollisesta populaation koosta.



Kuva 4:
Kasvunopeuden arvoilla 3 (ylempi) ja 3,5 (alempi) populaation koko vaihtelee jaksollisesti. Edellisessä tapauksessa koon vaihtelu heikkenee, mutta on selvää vielä sadan sukupolven kuluttua. Jälkimmäisessä tapauksessa vaihtelu on voimakasta ja siinä on kaksi päällekkäistä jaksoa, joista toisen vaihtelu heikkenee. Populaation aloituskoko on kummassakin tapauksessa miljoonasosa suurimmasta mahdollisesta populaatiosta.

Kuva 5:
Populaation koon vaihtelu muuttuu hyvin voimakkaaksi, kun kasvunopeus lähestyy arvoa 4. Vaihtelu näyttää jo täysin säännöttömältä, kaoottiselta.





Kuva 6:
Populaation koko Verhulstin lain mukaan sadan sukupolven aikana kasvunopeuden eri arvoilla. Pienillä kasvunopeuden arvoilla populaation koko vakiintuu ennen pitkää. Kolmea suuremmilla kasvunopeuden arvoilla populaation koko vaihtelee jaksollisesti, mikä näkyy kuvioissa käyrän hajaantumisena. Kasvunopeuden arvolla 4 vaihtelu on kaoottista. Populaation alkukoko on kaikissa tapauksissa yksi miljoonasosa.

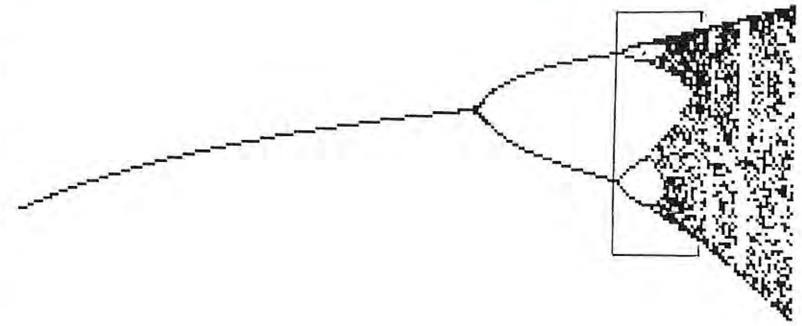
Pisteet vastaavat jaksollisen vaihtelun aallonharjoja ja -pohjia. Logo-ohjelmassa tämä saadaan aikaan siten, että sana SETPOS vaihdetaan sanaksi DOT.

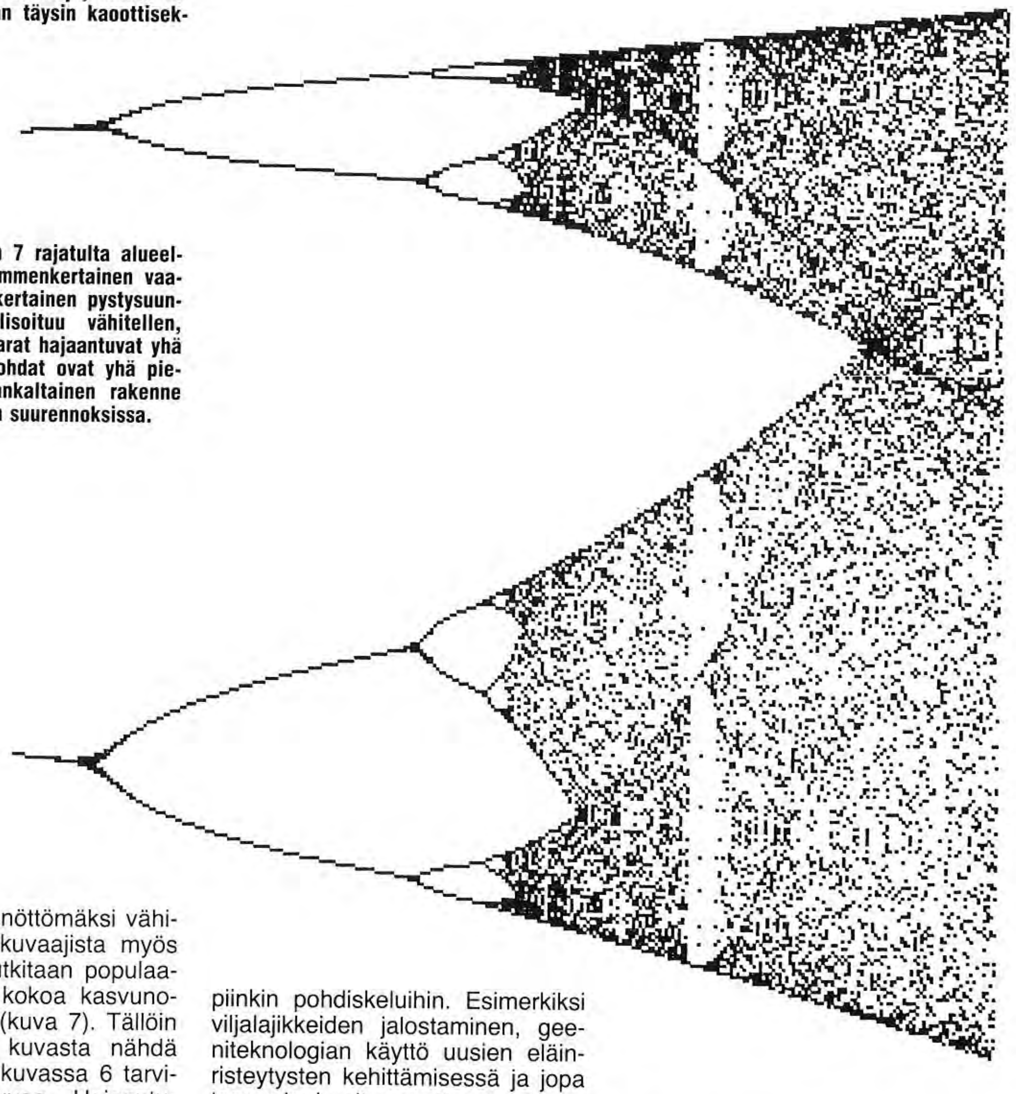
Kasvunopeuden arvolla 3,5 käyrät hajaantuvat uudestaan, mikä merkitsee uuden, vaihteluitaan pienemmän jaksollisuuden tulemista mukaan. Yhä uudet hajaantumiset aiheuttavat sen, että populaation koon muuttuminen näyttää täysin kaoottiselta kasvunopeuden arvolla 4. Laskusääntö on yhä edelleen sama yksinkertainen toisen asteen polynomi, mutta sen tuottamat tulokset eivät enää olekaan yksinkertaisia.

Populaation koon kehityksen muuttumisen säännöttömäksi vähitellen voi nähdä kuvaajista myös toisella tavalla. Tutkitaan populaation vakiintunutta kokoa kasvunopeuden funktiona (kuva 7). Tällöin voidaan yhdestä kuvasta nähdä sama asia, mihin kuvassa 6 tarvitaan kuusi osakuvaa. Hajaantumista voidaan tutkia tarkemmin tekemällä käyrästä osasuurennus (kuva 8).

Populaation kasvukäyriä voidaan tutkia pelkästään matemaattisena harjoituksena, mutta ne voivat myös antaa aihetta syvällisempiinkin pohdiskeluihin. Esimerkiksi viljalajikkeiden jalostaminen, geeniteknologian käyttö uusien eläinristeytysten kehittämisessä ja jopa terveydenhuolto asettuvat toiseen valoon lisätessään ihmispopulaation kasvunopeutta. Pitkällä aikavälillä koko maapallon väestön moraalinen hyvä ei ehkä olekaan sama asia kuin yksityisen kansalaisen tai edes jonkin kansakunnan elintaso. □

Kuva 7:
Populaation vakiintuneen koon muuttuminen kasvunopeuden funktiona. Kasvunopeus vaihtelee vasemmalta 1,5:stä 4:ään oikealle 0,01:n välein. Kullakin kasvunopeuden arvolla kuvioon on merkitty sata pistettä, jotka vastaavat sukupolvien 101–200 kokoa. Pisteet ovat aluksi päällekkäin (käyrän vasen pää), mikä osoittaa populaation koon vakiintumista. Kolmea suuremmilla kasvunopeuden arvoilla koko ei enää vakiinnu, vaan vaihtelee jaksollisesti, mikä näkyy käyrän hajaantumisena. Kasvunopeuden arvolla 3,5 vaihtelu muuttuu kaksijakoiseksi. Käyrän hajaantuminen tämän jälkeen yhä uudestaan osoittaa, että vaihteluun tulee uusia jaksollisia komponentteja, minkä takia vaihtelu käy pian täysin kaoottiseksi.





Kuva 8:
Osasuurennos kuvaan 7 rajatulta alueelta. Suurennus on kymmenkertainen vaakasuuntaan ja viisinkertainen pystysuuntaan. Käyrä fraktalisoituu vähitellen, toisin sanoen sen haarat hajaantuvat yhä uudestaan. Yksityiskohdat ovat yhä pienempiä, mutta samankaltainen rakenne säilyy tarkemmissakin suurennoksissa.

Lisää luettavaa:

Gleick, J. 1987. Chaos, making a new science. New York: Viking.
Holden, A. 1986. Chaos. Manchester: Manchester University Press.
Peitgen, H. ja Richter. P. 1986. Beauty of fractals, images of complex dynamical systems. Berlin: Springer Verlag.

14b
Oulipon matematiikkaa S + n (Dimensio 2023-06-06)
https://dimensiolehti.fi/oulipon-matematiikkaa-s-n/

Oppimisen iloa – Nean matikka

NEA JUNG, HANNELE IKÄHEIMO ja **HANNU KORHONEN**

Opettaminen ja oppiminen kietoutuvat toisiinsa sekä käsitteinä että toimintoina. Ne kilpailevat ensisijaisuudesta yhtä monimutkaisella tavalla kuin muna ja kana. Opettaja avaa mahdollisuudet oppimiselle, mutta vasta oppijan kokemukset todentavat hänen opettamiskäsityksensä menestyksekkyyden.

Opettajien pedagogista keskustelua ohjaa oppimiskäsitys. Se näkyy jo määrällisesti. "Oppimiskäsitys" antaa verkkohaulla 19 000 osumaa, kun taas "opettamiskäsitys" vain 300. Kuitenkin nimenomaan opettamisen tapa parhaimmillaan avaa tai pahimmillaan sulkee oppimisen polkuja. Paras tie opettajan ammatilliseen kehittymiseen onkin ehkä seurata oppilaiden oppimista ja kuunnella herkällä korvalla, mitä he kertovat oppimisestaan.

Tämän jutun sankari on **Nea Jung**, alle kolmikymppinen huonekaluentisöijä ja rakennusmaalari, jonka haaveena on opiskella rakennusmestariksi. Peruskoulussa matikka oli vaikeaa. Tukiopetuksessa hän sanoo istuneensa "turhan panttina, koska siellä oli sama opettaja kuin tunnilla, jonka opetuksessa en oppinut".

Lukiossa matematiikan oppiminen oli välistä vähän helpompaa. Vanhat oppimis- tai paremminkin oppimattomuuskokemukset olivat kuitenkin raskas painolasti vielä ammatillisessa koulutuksessakin. Oman oppimisensa sankaria hänestä olisi tuskin tullut ilman *Helsingin erilaisten oppijoiden HEROn* vertaisryhmää ja hänen matematiikkavaikeuksiinsa paneutunutta opettajaa.

Hannele Ikäheimo on pitkän linjan matematiikan opettaja. Hänen uransa alkoi jo 1970-luvulla matematiikan oppimisvaikeuksien tutkijana ja matematiikan erityisopetukseen erikoistuvien opettajien kouluttajana Jyväskylässä. Myöhemmin hän on opettanut lapsia, nuoria ja aikuisia sekä Ruotsissa että Helsingissä, tuottanut oppi- ja arviointimateriaaleja sekä kouluttanut opettajia.

Hän on yksi neljästä Matikkamaa-idean keksijästä ja ollut mukana Varga-Neményi-menetelmän tuomisessa Suomeen. Hänen perustamansa matematiikan opettamiseen keskittyvä yritys *Opperi* täytti juuri 25 vuotta. Kaikesta kokemuksestaan huolimatta hän sanoo Nean olevan olennainen kiinnekohta ammatillisen kehityksensä tiellä ja Nean kokemusten kuvaavan opettamiskäsitystään paremmin kuin paraskaan tieteellinen artikkeli.

Hannele kertoo

Tutustuin Nean matematiikan osaamiseen opettaessani HEROn oppimisvaikeuksista kärsivien vertaisryhmää. Hänen taitonsa olivat siinäkin ryhmässä keskimääräistä heikommat. Käsitteiden hallinnan tasoa luonnehti hyvin hänen kysymyksensä: "*Eikö 25 prosenttia saadakin, kun jaetaan 25:llä?*" Konkreettinen materiaali sopi Nealle niin hyvin, että ymmärtämisen helppous murtokakuilla työskenneltäessä aiheutti hämmästystä: "*Meinaatko, että 25 prosenttia saadaan jakamalla neljällä?*"

Ryhmätunneilla Nea oli aktiivinen, hän kysyi paljon eikä luovuttanut ennen kuin ymmärsi asian. Vaikeudet olivat kuitenkin niin syvällä, että ryhmäopetus paransi hänen tuloksiaan vain vähän. Pari vuotta myöhemmin hän tuli luokseni yksin opiskelemaan matematiikkaa kerran viikossa pari tuntia kerrallaan. Tarkemmassa kartoituksessa paljastui Nean heikoin alue: desimaalilukulaskut ja koko desimaaliluvun käsite.

Meinaatko, että 25 % saadaan jakamalla neljällä?

Työskentelimme aina konkreettisten käsitteenmuodostusvälineiden avulla samalla selostaen tekemistä. Sen jälkeen Nea piirsi ja väritti tehdyt asiat vihkoonsa. Lähetin myös muutamia tehtäväsivuja sähköpostilla ja hän lähetti väritetyt ratkaisut skannattuina takaisin.

Aloitimme prosenttilaskulla, josta Nea oli mielissään. "*Rakennusmestarina tarvitsen prosenttilaskuja ja haluan osata niitä*", hän sanoi. Ryhmäopetuksessa Nea oli oivaltanut, että 25 prosenttia jostakin saadaan jakamalla 4:llä,

Hannele kertoo...

mutta taito ei saanut tarpeeksi vahvistusta, sillä väärien keinojen poisoppimiseen olisi tarvittu enemmän aikaa kuin ryhmäopetuksessa oli mahdollista antaa.

Koska desimaaliluvut olivat vaikeita Nealle, hän sai rakentaa lukuja paikka-alustalle kymmenjärjestelmävälineillä ja desimaaliosilla sekä opetusrahoilla. Laskujen puhuminen ääneen oli outoa. Vaikeaa hänen oli tottua myös siihen, että kotona sai tehtäviä tehdessään käyttää apuna samoja välineitä kuin opetustunnillakin. Hänen kouluaikanaan mitään toimintavälineitä ei ollut ollut käytössä. Piirroksiakin oli saanut käyttää vain oppimisen alussa, mutta ei enää tehtäviä ratkaistaessa.

Kouluopetuksessa olisi tärkeää antaa aikaa oppimiseen ja lupa käyttää kaikkia niitä välineitä, joita oppilas tarvitsee oppimisensa ja osaamisensa tueksi. Jos lapset eivät aikanaan opi ymmärtämään tärkeimpiä peruskäsitteitä, he eivät osaa niitä aikuisinakaan. Oppiminen on silloinkin mahdollista, mutta pysyvien oppimistulosten saavuttaminen saattaa vaatia yksityisopetusta ja viedä vuosia. Niinpä jatkamme Nean kanssa edelleen.

Nea kertoo

Aikasemmin opettelin vain sääntöjä ja kaavoja siitä, miten laskut kuuluu tehdä eikä ketään ollut auttamassa, jos tein väärin. Tai jos apua oli saatavilla, niin se oli sitä, että opettelin jonkun systeemin. Ei kukaan osannut selittää niitä asioita niin, että olisin ne ymmärtänyt. Kaikki perustui tekniikkaan.

Nykysin läksyjen teko on pähkinä purtavaksi tai jopa helppoa ja hauskaa. Jos jotain ei osaa tai ymmärrä, niin tiedän, että sulla [opettaja Hannelella] on vaikka millasia välineitä, joiden avulla asian voi ymmärtää ilman teoriaa tai kaavoja. Samoin kuin tieto siitä, että on joku jolta kysyä niin, että tietää saavansa selkokielisen ja hyödyllisen vastauksen ilman teoriaa.

Meidän matikka ei ole pelkkää teoriaa, kaavoja ja sääntöjä. Meidän matikka on kuin ristikon tai sudokun täyttöä, joka on sopivan iso pähkinä purtavaksi. Meidän matikka on hauskaa leikkiä väreillä ja erilaisilla välineillä ja samalla siinä on logiikka ja säännöt niin kuin ristikossa tai sudokussa.

Ennen kuin me ryhdyttiin opiskelemaan matikkaa yhdessä, en edes tajunnut, miten paljon henkisiä lukkoja matikasta oli tullut. Olin niin tottunut siihen robottimaiseen, kaavamaiseen sääntöjen viidakkoon, mistä tuntui olevan mahdotonta saada kunnon otetta, että mun mielestä mitään epäloogisempaa ei ollut olemassakaan kuin matikka.

Vaikka pidin uudesta selkeästä tavasta oppia, en kyennyt omaksumaan ja oppimaan alussa asioita uudella tavalla, koska monet asiat soti niin vahvasti niitä juttuja vastaan, mitä koulussa oli päähän taottu. Nyt mun ei tarvinnut muistaa sääntöjä kuin orja, vaan saatoin pohtia ja havainnoida konkreettisesti niitä asioita.

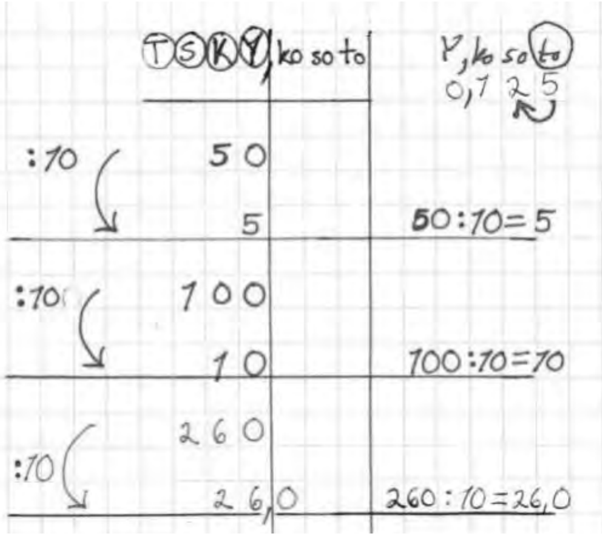
Murtoluvut, jotka olivat olleet epäloogista ja käsittämätöntä inhottavaa roskaa, olivat yhtäkkiä murtokiekoilla konkreettisia, silminnähtäviä, totta kai elämyksiä. Harmi vain, että lukot aiheuttivat sen, että pidemmän päälle mieleen jäi vain se mahtava totta-kai-elämys. Muuten asia valui pois päästä kuin vesi siivilän läpi. Senpä takia asioita on jouduttu kertaamaan todella sitkeästi, että ollaan saatu siivilän reiät tukittua pikkuhiljaa yhä tiiviimmin.

Sitä mukaa kun lukot hellittävät, asiat alkavat jäädä päähän niin, että niistä saa otteen ja niitä voi ruveta konkreettisesti käyttämään kompastumatta. Nykyisin jos ei osaa tehtäviä, ne ei jää selvittämättömiksi mustiksi aukoiksi taidoissa, vaan ne on asioita, joihin on olemassa ratkaisu ja selitys, jonka voi viimeistään pienen treenin jälkeen ymmärtää ja omaksua.

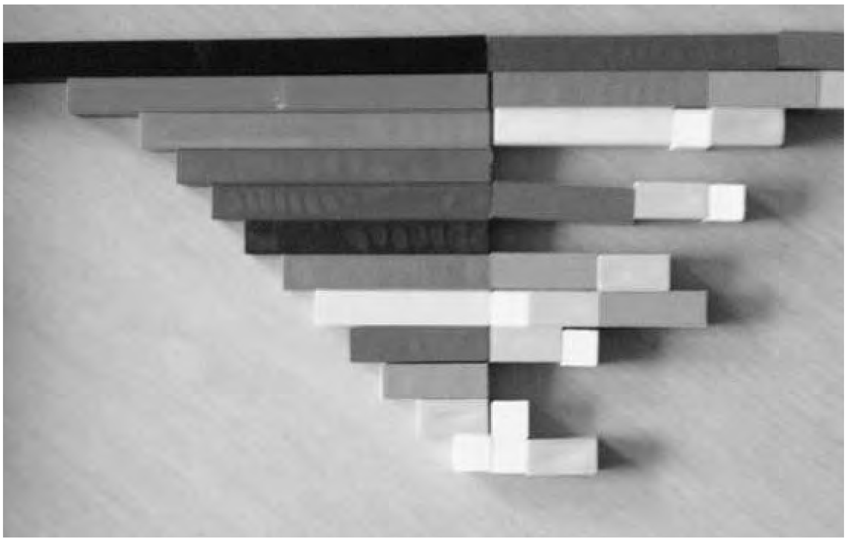
Ennen matikantunti oli hirvitys, jonka olisi halunnut välttää millä hinnalla hyvänsä, mutta joka oli kestettävä ”kuin mies”, niin kuin länkkäreissä sanotaan. Sun matikan tunnille meno on yhtä rentoa kuin vessaan meno sudokun kera.

Meidän matikka

Matikka sun kanssa on simppeliä, selkeetä, mielenkiintoinen pähkinä purtavaksi. Jos joku asia tuntuu vaikealta, niin ei tarvitse pelästyä, että tässä sitä taas ollaan – lisää käsittämättömyyksiä – vaan tietää että kyllä se siitä selviää, kun vain treenataan sen verran kuin tarve vaatii.



Ei se pilkku siirry minnekään,
vaan pysyy paikoillaan!
Noi numerot siirtyvät!



Tää on huijausta,
ei tarvii laskea,
voi vain ajatella!

Meidän matikka on rentouttavaa siinä mielessä, että kun uppoutuu täysin siihen tekemiseen, niin kaikki muut kiireet ja huolet unohtuu. Tunneilta lähtiessä voi palata arjen askareisiin ja kiireisiin kevein mielin eikä niin kuin ennen, kun tuntui että on vajonnut taas kerran pohjattomaan suohon, mistä ei ole ylöspääsyä, ja sai olla onnellinen, jos oli tunnilla onnistunut edes johonkin takertumaan. Välillä tunnin jälkeen saattoi kokea onnistumisen iloa, kun oli onnistunut oppimaan tunnin asiat, mutta se oli taas sitä teoreettista oppimista, mikä ei milloinkaan voi korvata konkreettista oppimista.

Tällä hetkellä tuntuu, että meidän matikka ja koulumatikka ovat kaksi eri asiaa. Meidän matikka on loogista ja hauskaa – koulumatikka etäistä teoriaa.

Kyseessä on niin iso jatkuva kokonaisuus, että en käsitä, miten joku voi edes kuvitella, että pikkulapsena ymmärtäisi ja osaisi nuo asiat ilman konkretiaa ja leikkiä. Mielestäni matikka todistaa paremmin kuin mikään muu sen, miten tärkeää olisi opettaa asiat lapselle leikin ja ymmärryksen kautta tylsän teorian sijasta.

Koulussa lapset istuvat takamuksellaan ja kuuntelevat tylsää teoriaa, kun itse saan kokeilla, tehdä ja päätellä koko ajan. Vaikken lapsi olekaan, niin kyllä nämä asiat mieluummin näin teen. Matikka on aina ollut vaikea ja tylsä inhokkiaine. Nyt se on hauskempaa kuin moni muu aine, mitä koulussa käytiin samalla tylsällä teoreettisella kaavalla.

Tällä hetkellä tuntuu, että meidän matikka ja se, mitä kouluissa opetetaan, on kaksi eri maailmaa ja asiaa. Meidän matikka on loogista ja hauskaa, koulujen matikka koneellista etäistä teoriaa. Nyt kun olen opiskellut lukiomatematiikkaa ja vaikka olen sen jotenkin aina osannut paremmin kuin perusmatikan, niin silti tuntuu vielä monesti, ettei epäloogisempaa olekaan kuin matikka, koska jotenkin vain niistä asioista ei pysty saamaan otetta samalla tavalla ilman konkretiaa, vaikka ne oppiskin.

Nyt tällä hetkellä minun matikkamaailmani on osittain selkeää ja konkreettista ja osittain sitä epäloogista koneellista teoriaa. Meidän matikan avulla olen pystynyt oppimaan, oivaltamaan ja tekemään koulun matikkaa kivuttomammin, mutta silti tuntuu niin kuin yrittäisin yhdistää kaksi eri maailmaa ja se tuntuu vaikealta.

Olen kyllä huomannut, että mitä paremmin opin ja omaksun meidän matikan, sen kivuttomammin ja helpommin pystyn yhdistämään sen koulun matikkaan. Koskaan ei kukaan enää koulussa voi pakottaa minua olemaan ajattelematta asioita meidän tavalla. Jos joku opettaja yrittää pakottaa minua ajattelemaan ne asiat matemaattisen teoreettisesti, niin kysyn siltä suoraan haluatko, että opin ja ymmärrän. **Koska jos opettaja oikeasti haluaa mun osaavan, se antaa mun ajatella omalla tavallani.** ■

17b
Matemaatikko halusi oppilaidensa ymmärtävän (Dimensio 19.10.2023).
https://dimensiolehti.fi/matemaatikko-halusi-oppilaidensa-ymmartavan/

ja

18
Matikkatäti Alli Huovinen (Dimensio 28.8.2025)
https://dimensiolehti.fi/matikkatati-alli-huovinen/

19
Kaktovik-numerot (Dimensio 6.7.2023)
https://dimensiolehti.fi/kaktovik-numerot/

20
Keelingin käyrä (Dimensio 27.7.2023)
https://dimensiolehti.fi/keeligin-kayra/

21
Välimerkkien matematiikkaa (Dimensio 29.8.2025 yhdessä Mikko Rahikan kanssa)
https://dimensiolehti.fi/valimerkkien-matematiikkaa/

Viides laskutapa

Teksti **HANNU KORHONEN** Kuvat John Tennielin alkuperäiskuvitusta 1860-luvulta (Liisa ihmemaassa, Liisa peilimaassa)

Matematiikan opetussuunnitelmateksteissä puhutaan usein neljästä laskutavasta tai neljästä peruslaskutoimituksesta. Miksi lukumäärä mainitaan, jos laskutapoja ei ole kuin neljä: yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku? Syy on historiallinen. Vielä 1800-luvulla laskutapoja oli viisi. Viides oli kolmen sääntö, Dreisatz, rule of three, regula de tri.

Kolmen sääntö on painunut unholaan niin täysin, että Wikipedia tuntee ilmauksen aivan eri merkityksessä, vain kirjallisuuden ja musiikin teemoissa ja rakenteissa. On kolme muskettisoturia, kolme pientä porsasta ja kolmisoinnut. ”Kolmen sääntöä” käytetään usein myös sanallisen tai kuvallisen ilmaisun rakenteen suunnittelun pohjana.

Kauan sitten kolmen sääntö liittyi matematiikkaan. Abraham Lincolnin kerrotaan sanoneen elämäkerrassaan, että koulussa hän oppi lukemaan, kirjoittamaan ja laskemaan kolmen sääntöön asti. Tätä on tulkittu niin, että hän halusi ilmaista oppineensa matematiikasta enemmän kuin tavalliset neljä peruslaskutapaa.

Liisa ihmemaassa –kirjan kirjoittaja Lewis Carroll alias Charles Ludwidge Dodgson oli paitsi kirjailija myös matemaatikko, pappi ja valokuvaaja. Hänen viimeiseksi jäänyt teoksensa oli jättiläisromaani *Sylvie ja Bruno*. Itse teosta on kuvattu ikävystyttäväksi, mutta siihen sisältyvä runo *Höperön puutarhurin laulu* sisältää toiseksi viimeisessä säkeistössään nykyisin vaikeasti avautuvan viittauksen matematiikkaan:

He thought he saw a Garden-door
That opened with a key:
He looked again, and found it was
A double Rule of Three:
”And all its mystery,” he said,
”Is clear as day to me.”

Olisi helppoa tulkita puutarha matematiikaksi ja laskutaidot portin avaimeksi. Toisaalta voi olla väärin etsiä merkityksiä sieltä, missä niitä ei ehkä ole alunperinkään ollut. Hölynpölyruno saattoi olla vain pelkkiä mielleyhtymiä ja leikittelyä kielellä.

Mikä sitten on tämä viides laskutapa ”kolmen sääntö”? On kaksi syytä etsiä vastausta Ruotsista. Ensiksi silloin kun kolmen sääntö, reguladetri, sisältyi

Suomen oppikoulujen opetusohjelmaan, opetus kävi valtaosaltaan tai yksinomaan ruotsiksi. Useimmat matematiikan oppikirjatkin olivat vielä 1800-luvun alkupuolella peräisin Ruotsista. Niissä reguladetria sanotaan yleisesti viidenneksi laskutavaksi. Toiseksi, vaikka reguladetri poistui ruotsalaisen koulun opetusohjelmasta ”uuden matematiikan” myötä 1960-luvulla, asia kiinnostaa siellä vielä nykyäänkin niin paljon, että viimeisen kymmenen vuoden aikana on ilmestynyt kaksi asiaa käsittelevää opinnäytettä [1], [2].

Ruotsin akatemian sanakirja vuodelta 1957 antaa seuraavan selityksen: laskutapa, jonka avulla lasketaan (käyttämättä yhtälöä) kolmen annetun suureen avulla neljäs etsitty suure, joka annettujen kanssa muodostaa suhteen. P. G. v. Zweigbergkin kirjassa *Räknekonsten med talrika övnings-exempel*, joka ilmestyi jo 1800-luvun alkupuolella, mutta jota käytettiin vielä 1900-luvun alussa, asia selitetään näin:

Regula de tri lär att, när tre termer i en analogi äro gifna finna den fjärde. Om a, b, c och d betecknar fyra tal, som äro proportionella så att a:b = c:d, så är produkten av de yttersta lika stor med produkten av de mellersta, nämligen ad = bc. Om nu ett av dessa är obekant, erhåller man alltid dess värde genom att dividera den motstående produkten med den bekanta faktor, hvarmed den obekanta är multiplicerad.

Nykyistä suomalaista kouluopetuksen sanastoa käyttäen kyse ei ole mistään muusta kuin verrannon ratkaisemisesta kertomalla ristiin, toisin sanoen Eukleideen *Alkeiden* seitsemännen kirjan lauseen 19 alkupuolesta.

Pikku laskuoppi kiertokouluja varten [3] käyttää 1800-luvun lopulla reguladetrista nimitystä *kolmen luvun lasku*. Laskutapa oli käytössä vielä itsenäisyyden ajan Suomessakin. Siitä vain käytettiin omaperäistä nimeä *päätöslasku*. Otavan iso tietosanakirja ei tuntenut reguladetriä eikä päätöslaskuakaan enää 1960-luvulla. Neuvoa on haettava siis kauempaa. *Maalaiskansakoulun laskentokirja* [4] kuvaa menetelmää näin:

Esim. Viiteen pukuun tarvitaan 15 m kangasta. Paljonko sitä tarvitaan kahdeksaan pukuun?

5 pukuun — 15 m
8 pukuun — X m

Päätöslaskun merkintää sanotaan **asettamukseksi**. X merkitsee asettamuksessa tuntematonta, siis sitä lukua, jota etsitään. Päätöslaskussa on kaksi osaa: **ehto ja kysymys**. Ehto sisältää tunnetut asiat, kysymys tuntemattoman asian. – – Ehdon ja kysymyksen vastaavat jäsenet muodostavat **jäsenparin**.

Ratkaisuasetelma on seuraavan kaltainen.

Päättely:
5:een pukuun menee 15 m.
1:een pukuun menee viidesosa 15 m:stä.

Koska yhteen pukuun menee noin paljon kangasta, niin 8:aan pukuun menee 8 kertaa niin paljon. 8 kirjoitetaan viivan päälle. Sitten supistetaan:

$$X = \frac{8 \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\,\text{m} = 24\ \text{m}$$

Varhemmin päättelyä ei kirjattu näkyviin eikä tulosta useinkaan merkitty lausekkeena, vaan sääntö ilmaistiin sanallisessa muodossa ja laskut laskettiin yksioikoisesti sen perusteella: vastaus saadaan jakamalla toisen ja kolmannen jäsenen (siis 8 n ja 15 n) tulo ensimmäisellä (siis 5:llä).

Laajuudeltaan päätöslaskun käsittely Merikosken kirjassa vastaa muita laskutapoja. Kokonaisten lukujen yhteenlaskua kirjassa on 13 sivua, 49 päässälaskutehtävää ja 112 kirjallista. Päätöslaskulle on varattu 24 sivua, joilla on 28 päässälaskua ja 170 kirjallista tehtävää. Nykyään viidettä laskutapaa ei tarvita.

Asia hoidetaan joko verrannon tai lineaarisen funktion avulla. Vanhemmat ihmiset muistavat vielä päätöslaskun, mutta nuorille opettajille nimikään ei ole enää tuttu.

Höperön puutarhurin laulu olisikin ehkä nykyään käännettävä viittaamatta kolmen sääntöön tai kaksiehtoiseen päätöslaskuun:

Puutarhan oven nähdä saa,
se avaimella aukeaa.
Kun kummaa vielä tarkastaa,
sen matikaksi paljastaa
ja käyttöhönsä valjastaa:
siis päivänselvää algebraa.

Päätöslasku on siirtynyt tarujen maailmaan, josta se kurkistaa vain harvoin esiin samoin kuin Carrollin *härmiö*; silloin, kun mieli on unen ja valveen rajalla, eikä todellisuuden paine pakota järkevyyteen.

Lähdeviitteet

[1] **Backman, B.-L. & Hedlund, J.** (1997) *Regula de tri. En undersökning som visar hur ett äldre matematiskt tankesätt kan påverka barns problemlösningsförmöga.* Examensarbete 1997: 080 LÄR, Luleå tekniska universitet. Osoitteessa http://tinyurl.com/5wqbxd, viitattu 23.10.2007.
[2] **Hatami, R.** (2007) *Licentiatavhandling i Reguladetri. En retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet.* MSI raport 07005, Växjö universitet. Osoitteessa http://tinyurl.com/6lp7za, viitattu 23.10.2007.
[3] **Suomalainen, K.** (1892) Pikku laskuoppi kiertokouluja varten. Porvoo, Werner Söderström.
[4] **Merikoski, K.** (1935) *Maalaiskansakoulun laskentokirja.* Helsinki, OY Valistus. ■

Kemiaa kauhassa

■ Kemia maistuu suussa hyvältä. Sen saivat huomata molekyyligastronomian iltaan kokoontuneet päijäthämäläiset opettajat.

Hannu Korhonen, Eila Hämäläinen ja Erna Arrenius

Kuohuviini on tuttua, mutta mitä ihmettä on ydintyminen?

Ilmiön pääsivät näkemään tervetuliaismaljoissaan päijäthämäläiset opettajat, jotka olivat kokoontuneet molekyyligastronomian koulutustilaisuuteen Lahden yhteiskoulun kotitalousluokkaan.

Suuri osa kuohuviinin viehätyksestä piilee kuplissa: kuinka paljon niitä on ja kuinka kauan kupliminen kestää. Kuplimista voi tehostaa järjestämällä juomaan kuplanmuodostusta edistäviä keskuksia, nukleaatiopisteitä. Hämäläisopettajien laseihin oli sujautettu ydintymispisteiksi palaset sokeria.

Kuplien syntyminen kiinteän faasin pinnalle eli ydintyminen on paljon tutkittu ilmiö, ei vain samppanjasnobien huvi. Ydintymisellä on käytännön merkitystä muun muassa hitsauksessa ja sääilmiöissä.

Ydintyminen ei ole vain samppanjasnobien huvi.

Molekyyligastronomian illan suunnittelu sai alkunsa, kun Matemaattisten aineiden opettajien liiton Päijät-Hämeen kerhon aktiivit jokunen vuosi sitten törmäsivät tutkimusprofessori **Anu Hopian** ruokakirjaan *Kemiaa keittiössä* ja innostuivat.

Niinkin arkiselta kuulostava ruoka kuin jauhelihakastike nousi Hopian ohjeiden mukaan tehtynä menestykseksi lukiolaisten kemian työkurssilla. Molekyyligastronomian koulutuksella olisi siis varmasti annettavaa myös kemian opettajille. Illan toteutusta ryhdyttiin suunnittelemaan, kun Taloudelliselta Tiedotustoimistolta ja Fazerilta saatiin lupaukset taloudellista tuesta.

Anu Hopia antoi vinkkejä, mistä löytää riittävän tarkat kemialliset selitykset kolmen ruokalajin illalliseen, ja hän myös ennakkotarkisti menyyn selityksineen.

Koulut ja kerhot voivat tiedustella molekyyligastronomian koulutusiltoja Eila Hämäläiseltä osoitteesta **eila.hamalainen@hollola.fi**.

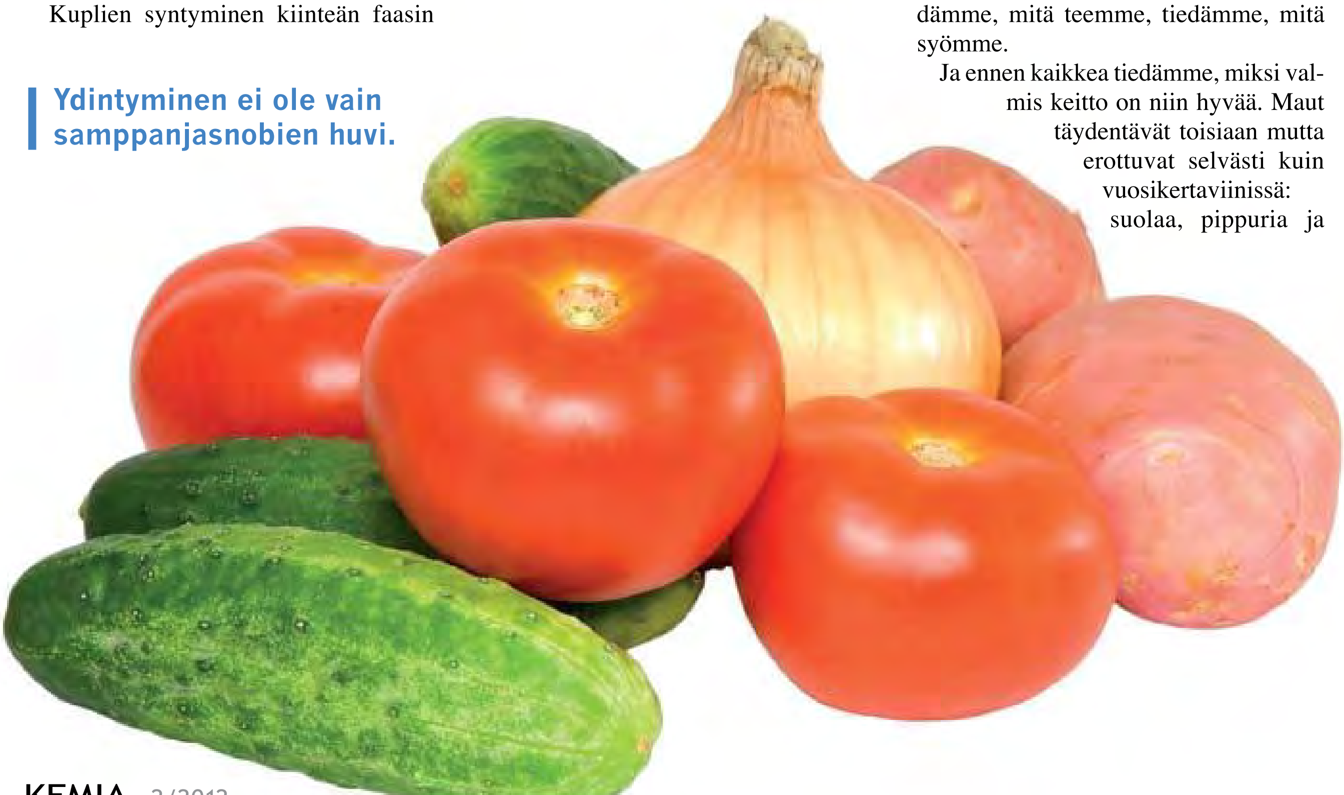
Anu Hopian blogia voi lukea osoitteessa **molekyyligastronomia.fi**.

Tekemällä oppii

Opetusmenetelmäksi valittiin konkreettinen tekemällä oppiminen. Molekyyligastronomiakurssilla tämä tarkoitti tietenkin ruoan laittoa yhdessä. Kemian ansiosta ruoan valmistus voidaan suunnitella niin, että jokainen laji varmasti onnistuu. Lisäksi tiedetään jo etukäteen sekin, miksi lopputulos on onnistunut.

Alkuruoaksi tehtiin kylmä keitto, tomaattidashi. Miksi ihmeessä? Helpomminhan tomaattikeittoa saa purkista tai pussista. Syy on yksinkertainen: kun tiedämme, mitä teemme, tiedämme, mitä syömme.

Ja ennen kaikkea tiedämme, miksi valmis keitto on niin hyvää. Maut täydentävät toisiaan mutta erottuvat selvästi kuin vuosikertaviinissä: suolaa, pippuria ja



Eila Hämäläinen

Hannu Korhonen ja Leena Hyttinen paistoivat fileen ensin pannulla. Sen jälkeen liha kypsennettiin uunissa 48-asteiseksi. Jälkikypsyminen sopivan roseeksi tapahtui foliokääreessä uunista oton jälkeen.

Ei ravintolassa turhaan kysytä, millaisena haluat pihvisi.

tomaatin makua, lisäksi häivähdys merilevää.

Jollekin dashi-keitto saattaa merkitä moraalista ongelmaa. Ei ole kauaa siitä, kun julkisuudessa keskusteltiin kiivaasti natriumglutamaatista. Isot ruokatalot taipuivat yleisön ennakkoluulojen edessä ja poistivat sen lisäainelistaltaan. Samoin jotkut kunnat kielsivät natriumglutamaatin käyttämisen kouluruokailussa.

Merilevä sisältää runsaasti luonnollista natriumglutamaattia, jota kurssilla uutettiin keittoon ehdoin tahdoin parantamaan sen makua. Eikä syyttä, sillä glutamaatti on viidennen perusmaun eli umamin aines. Myös tomaatissa on sitä luonnostaan, samoin lihassa ja monessa muussakin ruoka-aineessa. Jokainen voi miettiä, onko sama aine purkista otettuna sen kummempaa.

Filee on taitolaji

Pääruokaan sisältyneen naudanfileen oikeaoppinen valmistaminen on taitolaji. Sen salaisuudet ovat kuitenkin yksinkertaiset: täsmälleen oikea lämpötila ja ajoitus. Niillä säädellään muutoksia, jotka vaikuttavat lihan proteiinien makuun ja suutuntumaan. Ei ravintolassa turhaan kysytä, millaisena haluat pihvisi.

Ohjeiden seuraaminen asteen tarkkuudella kannatti. Filee oli juuri niin punertavaa ja mehukasta kuin toivoa saattaa, *rosé à la perfection*. Myös lisäkkeet, paistetut, karamellisoituneet sipulirenkaat ja smetanalla maustettu bataatti-perunamuusi, ansaitsivat omat ylistyslauseuntonsa.

Jälkiruokamme peikkovaahto kuulostaa lastenkutsujen suosikilta. Taiten valmistettuna se maistuu kuitenkin aikuisenkin suussa. Norjassa vaahto on perinteinen, monimuotoinen herkku. Vastaavia reseptejä on Suomessakin, mutta kuka nyt innostuisi, kun sen nimenä keittokirjassa on tavallinen "kevyt puolukkavaahto".

Jos kuitenkin haluaa jotain todella herkullista mutta silti kohtalaisen helppotöistä, tämä on jälkiruoka, johon kannattaa tarttua. Mukana on myös ainutlaatuisuuskomponentti. Puolukka-valkuaisvaahtoa ei saa Keski-Euroopasta raa'assa munassa piilevän salmonellavaaran takia. Suomessa sitä vaaraa ei ole. ❒

Hannu Korhonen on emerituslehtori, Eila Hämäläinen kemian lehtori ja Erna Arrenius fysiikan lehtori.

korhonen.h@gmail.com
eila.hamalainen@hollola.fi
erna.arrenius@lyk.fi

Niinkin arkiselta kuulostava ruoka kuin jauhelihakastike nousi Anu Hopian ohjeiden mukaan tehtynä menestykseksi.

➤➤➤

Sata vuotta Turingin syntymästä

Englantilaisen matemaatikon Alan Turingin syntymästä tuli kesällä 2012 kuluneeksi sata vuotta. Hän kuoli 41-vuotiaana syanidimyrkytykseen epäsiveellisestä teosta tuomittuna ja kemiallisesti kastroituna. Kuitenkin hänen muistoaan juhlitaan ympäri maailmaa. Matemaatikot häntä voisivat juhliakin, mutta miksi ihmeessä me suomalaiset humanistitkin?

ALAN TURINGIN MUISTOPATSAS BLETCHLEY PARKISSA, JOSSA TOIMI TOISEN MAAILMANSODAN AIKANA BRITTIEN SALAINEN KOODINMURTOKESKUS. KUVA: © JON CALLAS, SAN JOSE, USA.

Alan Mathison Turing syntyi Lontoossa kesäkuun 23. päivänä vuonna 1912. Isä oli vanhaa skottilaista ja äiti irlantilaista sukujuurta. He olivat tavanneet ja avioituneet Intiassa, missä isällä oli korkea asema brittiläisessä virkamieskunnassa. Vanhemmat asuivat pääosin Intiassa, mutta pojat jätettiin sijaisvanhempien hoitoon jo pian Alanin syntymän jälkeen. Silloin Alan oli vielä sylivauva ja vanhempi veli **John** viiden ikäinen. John kuvaa eroa sydäntäsärkeväksi ja katsoo sen vaikuttaneen olennaisesti Alanin myöhempään elämään.

Perheen yhteiskunnallisen aseman takia pojat pantiin yksityiskouluun. Vanhemmasta veljestä tuli arvostettu lakimies. Alanin valinta olivat luonnontieteet. Kouluopintojensa asemesta hän paneutui kemian kokeiden tekemiseen. Hän ei saanut oppiaan niinkään koulusta kuin kirjoista. Alkuvaiheen oppaana oli kansantajuinen teos *Luonnon ihmeitä, jotka jokaisen lapsen pitäisi tuntea*. Tätä koulu ei tietenkään arvostanut, ja häntä pidettiin melkoisen kyvyttömänä opiskelijana.

Rehtorin kerrotaankin sanoneen, että jos Alan keskittyy yksinomaan luonnon tutkimiseen, hänen koulunkäyntinsä on hukkaan heitettyä aikaa. Luottamusta opiskelijan kykyihin eivät myöskään lisänneet Alanin surkea käsiala ja hänen omaperäiset matematiikanopiskelun tapansa. Hän pysyi kuitenkin valitsemallaan linjalla, vaikkakin julkisesti kapinoimatta. Siitä hän kirjoitti äidilleen sanoen, että huolimatta koulun vaatimuksista hän tekee kokeitaan siinä järjestyksessä kuin itse haluaa.

Alanin omaperäisyydestä ja kyvykkyydestä ovat esimerkkeinä kirjat, joita hän luki kouluopetuksen ohella. Niistä kannattaa mainita erityisesti suhteellisuusteoriaa selostava *Fyysisen maailman luonne*. Se oli ilmeisen tärkeä Turingin myöhemmälle ajattelulle, sillä siinä tekijä pohtii muun muassa ennaltamääräytymistä, vapaata tahtoa ja esimerkiksi sitä, miten kokoelmasta yksinkertaisia atomeja voi syntyä ihmisaivojen kaltainen ajatteleva kone.

Alan ei ollut sosiaalisesti lahjakas, enemmänkin syrjäänvetäytyvä. Eristäytymiseltä hänet pelasti ystävystyminen vuotta vanhemman erittäin lahjakkaan koulutoverinsa kanssa. Suhde ei kestänyt pitkään, sillä toveri kuoli jo koulupoikaikäisenä. Alan oli silloin kahdeksantoistavuotias.

Cambridgen aika

Siitä huolimatta, että Alan ei panostanut kouluopintoihinsa, hän sai suoritetuksi ainetutkintonsa ja jatkoi opintojaan yhdessä Cambridgen yliopiston vanhimmista collegeista, King's Collegessa. Cambridgen puhtaan ja soveltavan matematiikan välillä taiteileva matemaattinen kulttuuri sopi hänelle hyvin, vaikka hän ei sielläkään edennyt pelkästään opetuksen varassa, vaan luki esimerkiksi **von Neumanin** kirjaa *Mathematische Grundlagen den Quantenmechanik* ja **Russellin** *Johdantoa matemaattiseen filosofiaan*.

Cambridge oli poikkeuksellisen vapaamielinen poliittisesti, yhteiskunnallisesti ja jopa moraalisestikin. Turing ei ollut aktivisti, mutta myötäili sodanvastaista liikettä ehkä osittain siksi, että hänen opiskelutoverinsa ja satunnainen rakastajansa oli tunnustautunut pasifisti. Turing ei myöskään liittynyt opiskelijapiireissä muodikkaisiin kommunisteihin. Häneen vetosivat Russellin tyylinen älyllinen ja yhteiskunnallinen elitismi sekä uskominen ihmisten elämän vaihtelujen ulottumattomissa oleviin matematiikan totuuksiin.

Cambridge oli nuorelle tiedemiehenalulle sopiva ympäristö muutenkin kuin tieteellisessä mielessä. Fyysinen kasvatus oli vahvasti mukana tunnetuimpana esimerkkinä jo vuodesta 1829 alkanut Cambridgen ja Oxfordin välinen vuosittainen soutukilpailu. Turingin harrastuksia olivat soudun lisäksi juoksu ja myöhemmin purjehdus. Juoksijana hän olikin maailmanluokkaa. Vielä vuonna 1948 hän sijoittui viidenneksi kilpailussa, jossa karsittiin Britannian edustajia Lontoon olympiamaratonille. Urheilu ei ehkä kuitenkaan ollut hänelle päämäärä, vaan keino, sillä hän on sanonut juoksemisestaan, että ainoa tapa purkaa stressiä on juosta kovaa.

Turing suoritti loppututkintonsa erinomaisin arvosanoin vuonna 1934. Seuraavana vuonna hän sai apurahan tieteellisen työn jatkamiseen. Matemaatikon uran luominen King's Collegessa näytti turvatulta, kun hän sai myös arvostetun Smithin palkinnon todennäköisyysteoriaan liittyvästä työstään. Palkinto oli muutamaa vuotta aikaisemmin myönnetty myöhemmin geometrikkona hyvin tunnetulle **H. M. S. Coxeterille** ja myönnettiin pari vuotta Turingin jälkeen tähtitieteilijä **Frederick Hoylelle**, joka sai sittemmin kuuluisuutta tieteiskirjailijanakin.

Turingin kone

Tutustuminen **Russellin** ja **Whiteheadin** suurteokseen *Principia Mathematica* ja **Gödelin** käänteentekeviin töihin saivat **Turingin** ajattelun suuntautumaan uusille urille. Hän alkoi tutkia **Hilbertin** 1928 muotoilemaa ja jo **Leibnitzin** pohtimaa ratkeavuusongelmaa, toisin sanoen sitä, onko olemassa yleistä menetelmää, jolla pystytään vaihe vaiheelta sääntöjä noudattaen päättelemään äärellisessä ajassa mistä tahansa logiikan lauseesta, onko se loogisesti tosi vai ei. Hänen unelmanaan oli tämän päättelyn mekanisointi eli jättäminen yksinkertaisten ohjeiden mukaan toimivan koneen ratkaistavaksi. Jos kone pystyisi äärellisen moneen askeleen kuluttua vastaamaan "kyllä" tai "ei", niin logiikka olisi ratkeava niin kuin perinteinen aristotelinen logiikka on.

Esimerkkinä askel askeleelta etenevästä sääntöjen noudattamisesta voidaan ajatella vakiintuneen asetelman mukaan suoritettavaa peruslaskutoimitusalgoritmia. Päättely olisi siis muutettava vastaavalla tavalla jonkinlaiseksi mekaaniseksi "laskemiseksi". *Turingin kone* lukisi ohjeita paperinauhalta ja etenisi alkutilasta lähtien askel kerrallaan lukemansa ohjeen mukaan. Koneita voisi olla erilaisia riippuen tutkittavan logiikan säännöstöstä (aksioomista), mutta myös mihin tahansa tarkoitukseen sopiva universaali Turingin kone on kuviteltavissa.


HANNU KORHONEN XXXI HUMANISMIN PÄIVILLÄ. KUVA © ROBERT BROTHERUS.

Turing itse osoitti kuitenkin jo vuonna 1936, ettei hänen koneensakaan kaikkeen pysty, kun hän todisti, että ns. ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka on ratkeamaton. Vastaus Hilbertin ratkeavuusongelmaan on siis yleisessä tapauksessa "ei". Ratkeamattomuus ei kuitenkaan ole todistus logiikan puutteellisuudesta, vaan päinvastoin vahvuus, sillä myöhemmin osoitettiin, että logiikka, joka on ratkeava, ei pysty esittämään edes alkeisaritmetiikassa esiintyviä päätelmiä.

Turingin kone on merkittävä idea. Se voidaan nähdä tietokoneen teoreettisena mallina ja lähtökohtana laskemisen ja laskettavuuden tutkimiselle. Turing pohdiskeli tekoälyn rajoja ja mahdollisuuksia siis

> Kun Turing ei päässyt toteuttamaan tietokoneideoitaan käytännössä, niin hän siirtyi pohtimaan biologian matematiikkaa: Fibonaccin lukujen esiintymistä kasvien rakenteissa, säde-eläinten muotoja ja kasvien geometriaa. Tälläkin alalla hänen työnsä oli uutta luovaa ja merkittävää.

jo paljon ennen kuin koko käsite keksittiin. Älyn algoritmisoimiseen ja koneellistamiseen hän suhtautui kuitenkin varauksellisesti vielä sodan jälkeenkin sanomalla, että "jos koneen oletetaan olevan erehtymätön, niin se ei voi samalla olla älykäs".

Turingin kone oli vain teoreettinen malli, mutta Turing pyrki myös toteutettavaan ratkaisuun, sillä hän kehitteli sähkömagneettisten releiden avulla toimivaa koodauslaitetta päästyään pariksi vuodeksi Yhdysvaltoihin Princetonin yliopistoon. Se olikin varmasti toivepaikka nuorelle tiedemiehenalulle, sillä sikäläinen matemaatikko **Church** oli selvittänyt ratkeamattomuusongelman Turingin todistuksesta riippumattomasti.

Princetonissa Turing julkaisi väitöskirjatyönään merkittävimmän ja syvällisimmän tutkielmansa laskettavuudesta nimellä *Ordinal Logics*. Siinä hän osoitti, että Gödelin epätäydellisyyslause ei ole lopullinen laskettavuuden este eikä ratkeavuusongelman kielteinen vastaus estä parempien logiikkojen kehittämistä. Olemassa olevan ratkeamattoman logiikkajärjestelmän pohjalta voidaan nimittäin aina konstruoida täydellisempi logiikka.

Koodinmurtaja

Turingille tarjottiin virkaa Princetonista, mutta hän palasi Cambridgeen aikaisemmin saamansa apurahan turvin. Siellä hän kuunteli **Wittgensteinin** luentoja matematiikan filosofiasta ja kehitteli mekaanista konetta, jolla voitaisiin laskea **Riemannin** dzeeta-funktion arvoja. Yliopistosta hän ei saanut virkaa, mutta hänet palkattiin koodien ja salakirjoitusten analysointikeskukseen heti Britannian sodanjulistuksen jälkeen syyskuussa 1939. Tehtävänä oli saksalaisten salakirjoituskoneen *Enigman* koodin murtaminen.

Ratkaisevaksi edistysaskeleeksi osoittautui taas kerran Turingin ajatus päättelyketjun mekanisoimisesta. Pian voitiinkin kääntää selväkieliseksi mikä tahansa *Enigma*-koodi, jonka pieni osa pystyttiin arvaamaan oikein. Vuoden 1940 lopulla Luftwaffen viestien tulkinta oli jo rutiinia, mutta laivaston koodia pidettiin murtamattomana. Tämäkin onnistui vajaassa vuodessa uusien tilastomenetelmien ansiosta. Yhdysvaltain liittyessä sotaan vuoden 1941 lopulla sukellusveneiden viestit pystyttiin tulkitsemaan jo säännöllisesti ja merisodan herruus siirtyi liittoutuneille.

Uusi katastrofi uhkasi, kun saksalaisten sukellusveneet saivat parannetun version *Enigma*-laitteesta. Helmikuun alussa 1942 viestejä ei enää pystytty tulkitsemaan. Vei kuitenkin vain muutaman kuukauden, että uudetkin koodit onnistuttiin murtamaan. Tämä merkitsi käännekohtaa koko sodassa. Tällä kerralla Turingin ajatuksien mekanisointiin käytettiin jo elektroniikkaa, ja se sai Turingin itsensäkin paneutumaan elektroniikkaan tavoitteenaan sähköisen universaalin Turingin koneen eli todellisen digitaalisen tietokoneen rakentaminen.

Sodanaikaisista ansioistaan Turing palkittiin Brittiläisen imperiumin veljeskunnan viisiportaisen luokituksen toiseksi alimmalla kunniamerkillä OBE ja myöhemmin vuonna 1951 Kuninkaallisen Seuran jäsenen arvonimellä FRS. Häntä ei kuitenkaan pidetty mukana tietokoneiden kehittämisessä, vaan hänelle tarjottiin 1947 sapattivuotta Cambridgessä. Turingista se oli hyvin turhauttavaa ja ehkä juuri siitä syystä hän ryhtyi taas juoksemaan niin, että se johti aina olympiaehdokkuuteen asti.

Kansalliselle fysiikan keskukselle laatimassa raportissa hän ei pohtinut pelkästään ohjeita noudattavan vaan myös oppivan koneen mahdollisuuksia. Harmillisesti raporttia ei koskaan julkaistu, mutta siinä esitetyt ajatukset ovat myöhemmin toteutuneet neuroverkkojen kehittämisessä. Hänen esittämänsä periaatteet koneelle annettavista lyhennetyistä toimintaohjeista merkitsivät kuitenkin ohjelmointikielten kehittämisen alkua.

Tragedia

Vuonna 1948 Turing siirtyi – tai siirrettiin – vielä syrjempään Manchesterin yliopiston laskentalaboratorion johtajaksi. Syrjäyttämisen syynä oli se, että kylmän sodan alkamisen ja Yhdysvaltain kanssa liittoutumisen seurauksena moraaliset asenteet jyrkkenivät. Tunnetuilta homoseksuaaleilta, muiden muassa Turingilta, evättiin kehittämistyössä vaadittu turvallisuusluokitus.

Tuona aika hän julkaisi kuitenkin vielä visionäärisen artikkelin *Laskennan koneistaminen ja älykkyys*. Sen hän aloittaa kysymällä, osaavatko koneet ajatella. Artikkelissa esitetyt ajatukset tiivistetään nykyään *Turingin testiin*, jonka kone läpäisee, jos sen kanssa keskusteleva ihminen ei osaa luotettavasti päättää, keskusteleeko hän koneen vai oikean ihmisen kanssa. Nyt runsaan puolen vuosisadan kuluttua tällaisia keskustelukoneita *chatbotteja* on verkossa runsain määrin.

Kun Turing ei päässyt toteuttamaan tietokoneideoitaan käytännössä, niin hän siirtyi pohtimaan biologian matematiikkaa: **Fibonaccin** lukujen esiintymistä kasvien rakenteissa, säde-eläinten muotoja ja kasvien geometriaa. Tälläkin alalla hänen työnsä oli uutta luovaa ja merkittävää. Edelleenkin puhutaan *Turingin systeemeistä*, jotka selittävät biologisten organismien kasvun takana olevia periaatteita eli morfogeneesiä. Yksinkertaisena esimerkkinä ovat leopardin täplät tai tiikerin juovat. Teoriaa ei tutkittu pariinkymmeneen vuoteen, ja vasta vuonna 1990 osoitettiin lopullisesti, että Turingin esittämä mekanismi on kemiallisesti mahdollinen.

Manchesteriin asettuminen koitui Turingin kohtaloksi. Ajan henki ei ollut enää niin salliva kuin Cambridgessä. Turing joutui syytteeseen homoseksuaalisuudesta, joka silloin oli lain mukaan rikos. Hänet tuomittiin ja hän joutui valitsemaan vankilan tai kemiallisen kastraation välillä. Pari vuotta tuomion jälkeen hän menehtyi syanidimyrkytykseen. Vielä tänä päivänäkin pohditaan, oliko se vahinko vai itsemurha vai vaiensiko Britannian turvallisuuspalvelu sillä tavalla miehen, joka tiesi liikaa.

Turingista ei juuri puhuttu pitkään aikaan hänen kuolemansa jälkeen, eikä hänen töitään tunneta läheskään niiden merkitystä vastaavalla tavalla. Syitä on useita. Hänen maineensa kärsi pahasti homo-oikeudenkäynnistä. Hän julkaisi hyvin vähän; ei kirjoja, vain muutaman tieteellisen artikkelin. Tärkein syy on ehkä kuitenkin se, että hänen työnsä oli salaista. Kaikki laskentakoneiden kehittämiseen liittyvät tiedot olivat suuria sotilassalaisuuksia toisen maailmansodan aikana ja vielä vuosia sen jälkeenkin. Hänen ansionsa tunnustettiin julkisesti paljon hänen kuolemansa jälkeen ja vasta muutama vuosi sitten, vuonna 2009, Ison-Britannian hallitus pyysi pääministeri **Gordon Brownin** suulla virallisesti anteeksi erään Britannian tuottamista älyistä loistavimman saamaa kohtelua. ■

Kirjoittaja on lehtori emeritus, Matemaattisten aineiden opettajien liitto. Kirjoitus pohjautuu Korhosen XXXI Humanismin päivillä pitämään esitelmään.

Harrastaja keksi yhden kiven laatoituksen

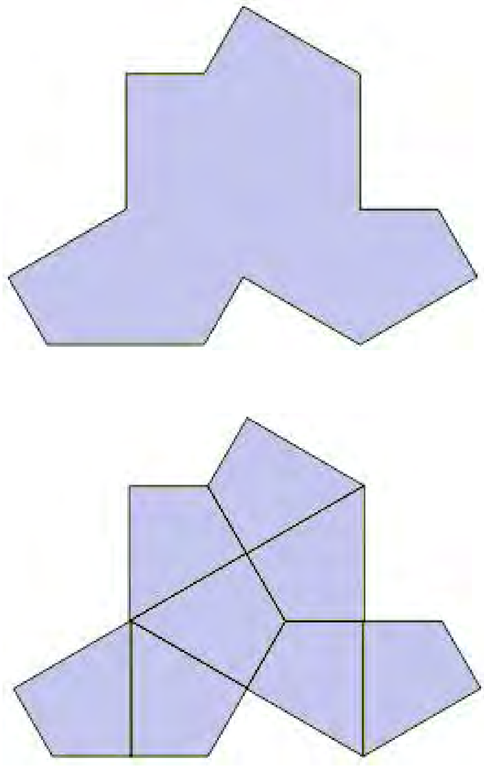
Hannu Korhonen

Katu- ja seinälaatoitukset ovat jaksollisia. Jaksottomat laatoitukset ovat olleet enemmän matemaatikkojen kuin rakentajien mielenkiinnon kohteina. Pitkään oli avoinna kysymys siitä, voidaanko taso laatoittaa jaksottomasti vain yhdellä laatalla. Pari sellaista laattaa on keksitty aikaisemmin [1]. Uusimman keksi englantilainen matematiikan harrastaja viime syksynä.

Uuden laatoituksen keksijä, matematiikan harrastaja, eläkkeellä oleva tulostinhuoltaja David Smith julkaisi tieteellisen artikkelin [2] kolmen matemaatikon kanssa avoimen julkaisemisen jakelualustalla Arxiv Forumilla 20. maaliskuuta 2023. Matemaatikkojen mukanaolo oli varmaan ehdottoman tarpeen, sillä artikkeli sisältää geometrisen kuvailun lisäksi myös todistuksen sille, että tästä uudesta laatasta voidaan tehdä useita erilaisia jaksottomia laatoituksia, mutta että siitä ei voida rakentaa minkäänlaista jaksollista laatoitusta.

Smith kertoo pohtineensa asiaa kymmenen vuotta [3]. ”Olen aina puuhastellut kaikenlaisten muotojen parissa. Yhden kiven ongelmaan olen suorastaan hullaantunut”, sanoo Smith. ”Pidin matematiikasta jo koulussa, mutta en suoriutunut siitä mitenkään loistavasti.” Keksintöä pidetään erityisen huomionarvoisena siksi, että se ei pohjaudu mihinkään aikaisemmin tunnettuun laatoitusideaan, vaan tuo mieleen pikemminkin aineen sisäisen rakenteen.

Alussa mainitun tiedeartikkelin kirjoittajat kutsuvat Smithin laattaa ”hatuksi”. Hyvällä tahdolla sen muodossa voikin olla näkevinään hatun kuvun ja lierit (kuva 1, ylempi). Laatta on 13-kulmio. Se rakentuu kahdeksasta yhtenevästä pitemmän lävistäjänsä suhteen symmetrisestä nelikulmiosta (kuva 1, alempi). Nämä ovat vähän kapeampia kuin Penrosen ”leijat”, terävä kulma on 60° ja kaksi muuta kulmaa suoria.



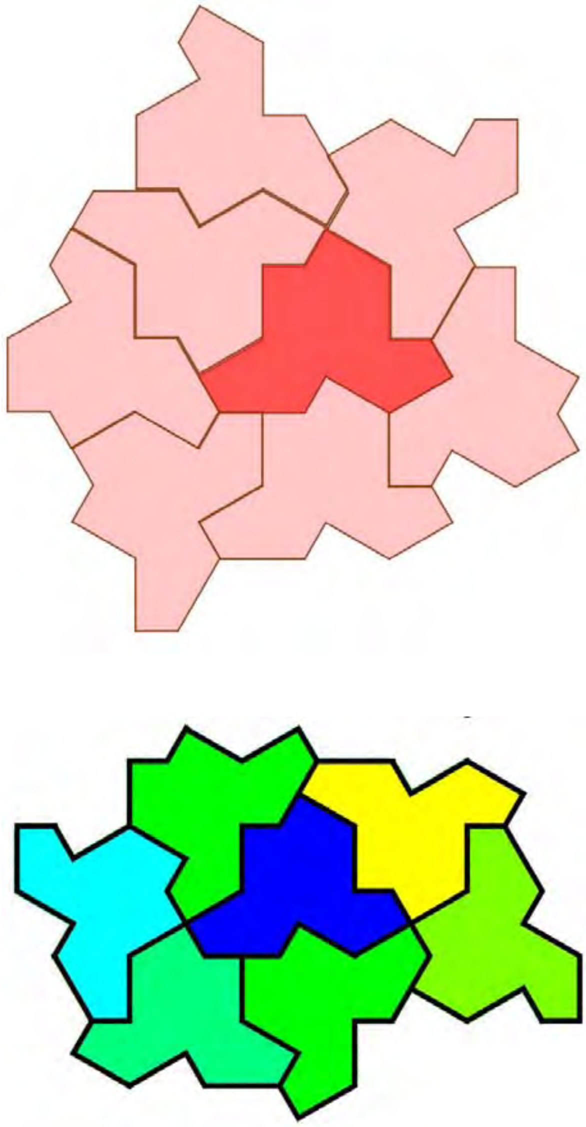
Kuva 1: Hattulaatta ja sen jako yhteneviin nelikulmioihin.

Suuret sanomalehdet tarttuivat aiheeseen nopeasti. New York Timesin viikkolehti kirjoitti siitä jo runsaan viikon kuluttua [3] sekä The Guardian [4] ja The Times [5] kahden viikon sisällä. Esimerkiksi Guardian luonnehti yhden kiven laatoitusta yhdeksi matematiikan kiehtovimmista mysteereistä. Median innostukseen vaikutti varmaankin se, että laatoitukset ovat visuaalisesti näyttäviä ja helposti ymmärrettävää tasogeometriaa, sekä toisaalta se, että näinkin konkreettiselta tuntuva ongelma oli askarruttanut matemaatikkoja jo kymmenien vuosien ajan. Ja ehkä vielä se, että idean keksijä oli maallikkoharrastaja eikä ammattimatemaatikko.

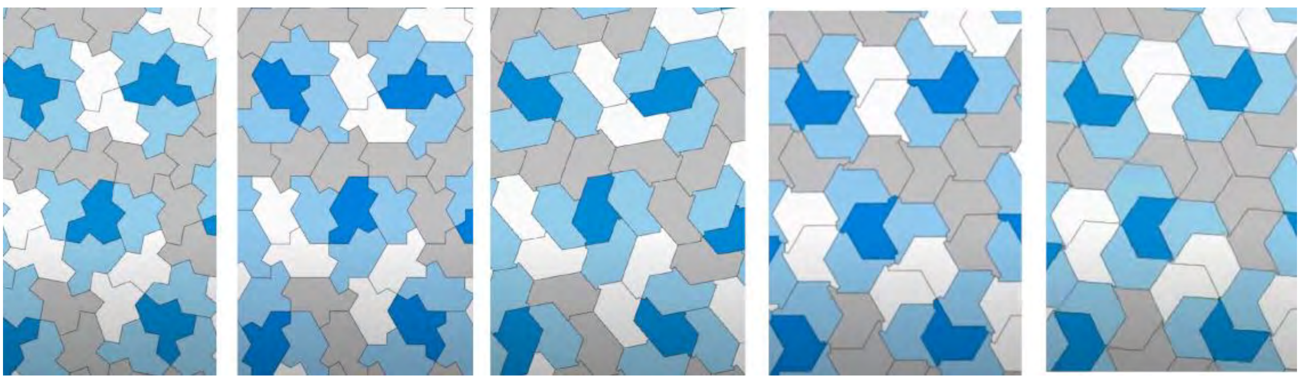
Tiedeyhdistysten verkkolehdet ja varsinaiset tiedelehdet olivat vielä nopeampia kuin sanomalehdet. Tieteen ja teknologian uutissivusto Phys.org kertoi artikkelista jo kolmen päivän kuluttua [6]. Uutinen oli lyhyt ja sisälsi lyhyen yhteenvedon siitä, mitä tason laatoitus tarkoittaa; muuten viitattiin alkuperäiseen tiedeartikkeliin. Wolfram-yhteisö tarttui aiheeseen vajaassa viikossa. Keskustelussa [7] analysoitiin tarkasti laatan muoto ja laatoitusmahdollisuuksia [8].

Smithin laatta – hattu – ei ole vain yksittäinen kiinteä geometrinen kuvio. Kuvion muotoa voidaan muuttaa jatkuvasti hatusta koveraksi kuusikulmioksi (kuva 3). IFLScience-uutissivuston artikkelin [9] mukaan ajatukselliset yhteydet ulottuvat myös puhtaan matematiikan ulkopuolelle. Esimerkiksi kvasikiteisten aineiden rakenteissa voidaan havaita samoja ominaisuuksia kuin jaksottomissa laatoituksissa. Samoilla ideoilla on sovelluksia myös käsipyyhkeiden kuvioinnista ja taittelusta häivehävittäjiin ja tieteiselokuvien muotoaan muuttaviin robotteihin.

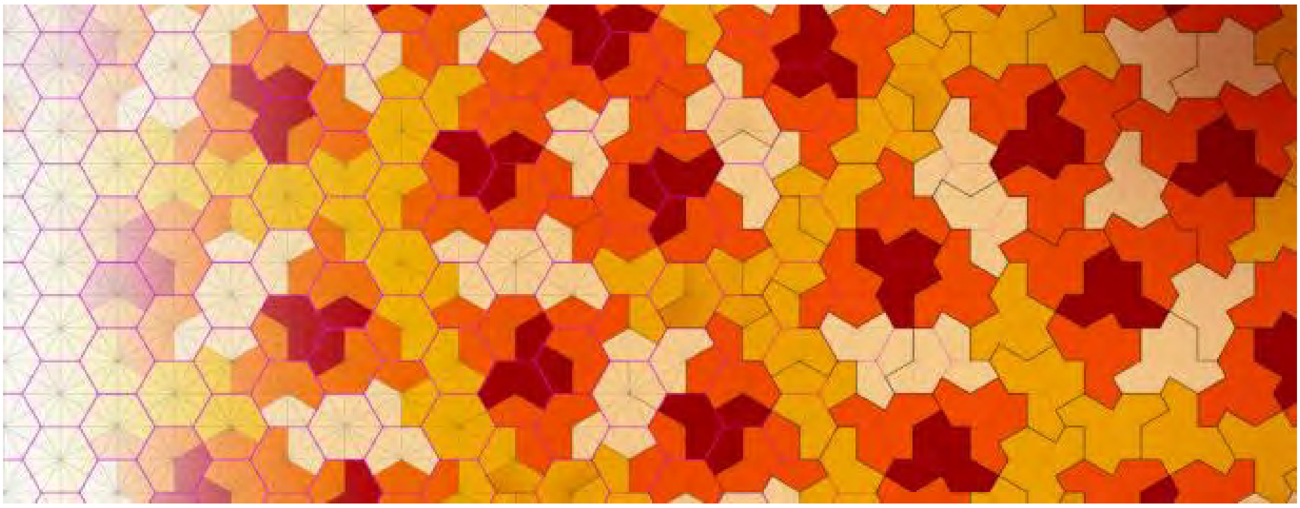
Quanta Magazine kuvasi perusteellisesti sen, miten tason peitto rakentuu hattulaatasta (kuva 4) [11]. Hattu ei kuitenkaan ole ainoa mielikuva, jonka Smithin laatta saattaa herättää tiedelehden toimittajassa [12] tai twiittaajassa [13] (kuva 5).



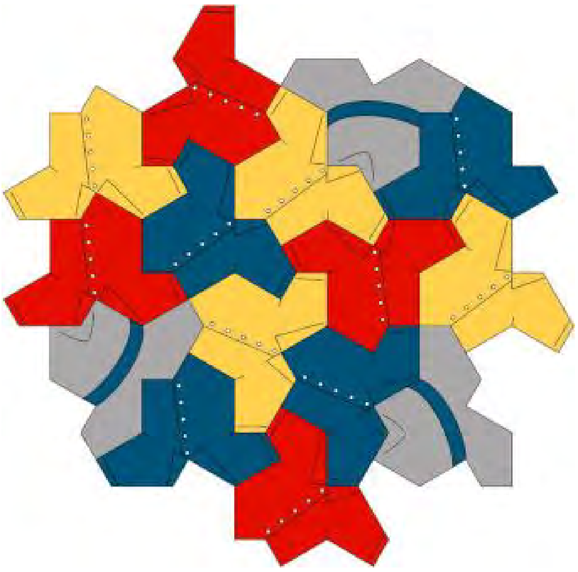
Kuva 2: Laatoitusta voidaan alkaa rakentaa hattulaatoista monella tavalla. Ylempi kuva kirjoittajan, alempi ote lähteestä [6].



Kuva 3: Vasemman osakuvan oikeassa ylänurkassa oleva sininen hattu muuttuu vähitellen oikeanpuoleisen osakuvan vastaavassa kohdassa olevaksi symmetriseksi kuusikulmioksi (kuvakaappauksia videosta [10]).



Kuva 4: Hattulaatoituksen pohjana voidaan nähdä kuusikulmioverkko.



Kuva 5: Smithin laatan voi kuvitella muuksikin kuin hatuksi (ylempi kuva Science News, alempi Twitter).

Lähteet ja lisää luettavaa

[1] Korhonen, Hannu (2022): *Yhden kiven laatoitus.* Solmu 2/2022 s. 4–6. Saatavissa myös `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2022/2/yhden_kiven_ongelma.pdf`

[2] Smith, David ym. (20.3.2023): *An Aperiodic Monotile.* Saatavissa osoitteesta `https://arxiv.org/pdf/2303.10798.pdf`

[3] Roberts, Siobhan: *Elusive 'einstein' solves a longstanding math problem.* New York Times Weekly 29.3.2023. `https://www.npr.org/2023/03/31/1167297046/a-hobbyist-in-the-u-k-has-come-up-with-a-new-13-sided-shape-called-the-hat`

[4] Cantor, Matthew: *The miracle that disrupts order': mathematicians invent new 'einstein' shape.* The Guardian 4.4.2023 osoitteessa `https://www.theguardian.com/science/2023/apr/03/new-einstein-shape-aperiodic-monotile`

[5] The Times: *Retired yorkshireman solves elusive einstein tile maths problem.* `https://www.thetimes.co.uk/article/retired-yorkshireman-solves-elusive-einstein-tile-maths-problem-vqw7xgt3p`

[6] Yirka, Bob: *A geometric shape that does not repeat itself when tiled.* Phys.org 23.3.2023. `https://phys.org/news/2023-03-geometric-tiled.html`

[7] Pegg, Ed (2023): *Einstein problem solved.* Wolfram Research osoitteessa `https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/2856178`

[8] *Hat Tile App* osoitteessa
https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/app.html

[9] Spalding, Katie: *This Brand New "Einstein"Tile Can Do Something No Other Shape Can Do.* IFLScience 28.3.2023
https://www.iflscience.com/this-brand-new-einstein-tile-can-do-something-no-other-shape-can-do-68201

[10] Science News, YouTube-video
https://www.youtube.com/watch?v=ugnvucpcfPA

[11] Erica Klarreich, Erica: *Hobbyist Finds Math's Elusive 'Einstein' Tile.* Quanta magazine 4.4.2023.
https://www.quantamagazine.org/hobbyist-finds-maths-elusive-einstein-tile-20230404/

[12] Conover, Emily: *Mathematicians have finally discovered an elusive 'einstein' tile.* Science News 24.3.2023.
https://www.sciencenews.org/article/mathematicians-discovered-einstein-tile

[13] Kaplan, Craig S.: *Find another reflected turtle in an aperiodic tiling.* Twitter 21.3.2023.
https://twitter.com/alytile/status/1638506055381708801?s=20

Hannu Korhonen, Orimattila

Geneettinen ”pikkuserkkuni” Kirsti

Kirsti Vassilevin kanssa minulla on yhteistä perimää 436 senttimorgania, vähemmän kuin minulla ja serkkuni pojalla (532 cM), mutta enemmän kuin minulla ja isänäidinpuoleisella pikkuserkullani (356 cM). Hän ei siis voi olla kovin kaukaista sukua. Hänestä en ollut kuitenkaan kuullutkaan ennen dna-osuman ilmestymistä tammikuussa 2019. Vaikka isänisää ei tunneta, niin isänäidin vaiheet ovat tavanomaisia värikkäämmät.

Kirsti asuu Helsingissä. Hänellä on kaksi poikaa ja lastenlapsiakin. Hän on työskennellyt Suomi–Venäjä-seuran matkaoppaana ja siksi matkustellut paljon. Emme ole koskaan tavanneet, mutta olemme olleet tiiviissä sähköpostikirjeenvaihdossa. Hänen olemassaolostaan sain tietää FamilyTreeDNA:n Family Finder -osuman ansiosta.

Kirstin äiti **Sointu** oli syntyjään Janssoneita Vihdistä. Isän äiti **Helmi Aleksandra**, avionimeltään **Heikkinen**, on puolestaan Simbergeitä Kärkölästä, s. 21.10 1881. Kummassakaan suunnassa ei näyttäisi olevan mitään yhteyttä rautalampilaisiin sukuihini ainakaan muutamaan sukupolveen. Sukulaisuus juontunee siten Kirstin isän isän kautta.

Mutta siinäpä onkin pulma. Kirstin isänisää ei tunneta. Kirstin isä **Keijo** s. 22.2.1909 sai sukunimekseen Heikkinen Helmin puolison mukaan. Perhetarinan mukaan Keijon biologinen isä olisi ollut tsaarin armeijan saksalainen sotilas, joka olisi vieraillut sotilaiden suosimassa, Helmin Viipurissa pitämässä teesalongissa.

Kirstin autosomaalisessa perimässä ei kuitenkaan ole erityisiä Keski-Euroopan suuntaan viittaavia jälkiä. Hänen perimänsä on 99,1-prosenttisesti suomalaista, loput 0,9 prosenttia balttilaista. Tämä ei siis tue Kirstin isänäidin kertomaa saksalaistaustaisesta isänisästä. Sen sijaan FamilyFinderin ilmoittaman sadan läheisimmän kokonaisperimäosumani joukossa minulla on Kirstin kanssa 12 yhteistä osumaa, lähimpänä alussa mainittu pikkuserkkuni, joka on sukuaan Gråsteneita isänäitini puolelta.

MyHeritagen tietokannasta löytyy toinen yhteinen lähiosuma, myös jo alussa mainittu isänpuolen serkkuni poika, jonka kanssa minulla on yhteistä perimää 532 cM ja Kirstillä 221 cM. Kirstin dna-osumana (180 cM) on myös kaukaisempi Gråsten-serkkuni, jonka kanssa minulla on yhteistä perimää 138 cM. Tämäkin viittaisi yhteisen perimämme tulevan isänäitini suvun Gråstenien kautta.

Sukutarinan taustoja

Kirsti kertoi isänsä Keijon syntyneen Langenneiden naisten kodissa Helsingissä. Se on varmaankin ollut opettajatar Emma Mäkisen (1849–1915) perustama Suomen ensimmäinen Langenneiden naisten turvakoti. Helsingin kaupunginmuseo antaa paikan osoitteeksi Merikatu 19–21[1].

Kirsti kertoi edelleen, että hänen isänsä ”myytiin vauvana Kauppatorilla Helsingissä”. Tämä tarkoittaisi sitä, että isänäiti luopui lapsestaan heti sen synnyttyä. Siihen aikaan isättömistä lapsista huolehdittiin nimittäin osana kunnallista vaivaishoitoa, asetus vuodelta 1879. Virallinen termi oli elätteelleantaminen (utackordering), mutta huutolainen oli se nimitys, jota arkipäivässä käytettiin. ”Elätteelle anto tapahtui viattomien lasten päivänä vuodenvaihteen tuntumassa. Tilaisuudelle oli ominaista huutokaupan piirteet.”[2] Elätteelle antaminen ei tuolloin ollut mitenkään tavatonta, sillä vuonna 1909 Helsingissä oli 381 elätteelle annettua 15 vuotta nuorempaa, joista vain 133 oli saanut paikan kaupungista.[3] Elätteelleantotilaisuuksia järjestettiin silloin jo useamman kerran vuodessa.

Edelleen Kirsti kertoi, että isänäidillä Helmillä oli teesalonki Viipurissa. Sen paikkakin on

Langenneiden naisten turvakoti Helsingissä[1].

tiedossa: Katariinankatu 12 (myöh. Linnankatu) Uudenportinkadun risteyksessä. Katujen nykyiset nimet ovat Крепостная улица 'Krepostnaja' ja улица новой заставы 'Novoj Zastavy'. Vanhat viipurilaiset saattoivat kyseenalaista teesalongin maineen, sillä siitä on sanottu muun muassa näin[4] : "Jotkut herrat taas eksyivät etsimään naisseuraa ja jännitystä hieman epämääräisestä Teesalongista Vanhastakaupungista." Käsitys epämääräisyydestä voi perustua myös kieltolain aikaisiin anniskelurikkomuksiin, joiden takia Teesalonki oli välistä suljettunakin.[5] Voi olla, että teesalonki toimi vain muutaman vuoden, sillä pitämisoikeutta koskevan asiakirjan rajavuodet ovat 1927–1934 [6]

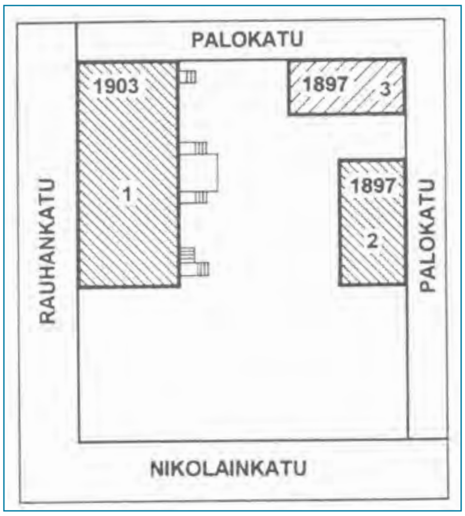
Voi myös olla, että muistitieto liioittelee Helmin asemaa, mihin Helmi on ehkä itsekin antanut aihetta aikanaan. Teesalongin omistajista ja vastuullisista hoitajista on useita lehtiuutisia 1920-luvun loppupuolelta eikä Helmiä mainita niissä. Hän saattoi kuitenkin olla työssä siellä. Viipurin kaupungin henkikirjassa mainitaan nimittäin vuonna 1918 tarjoilija Helmi Heikkinen, joka asui Keisarinkadun (myöh. Luostarinkatu) numerossa 12. Syntymävuodeksi on merkitty 1887, vaikka meidän Helmimme oli syntynyt oikeasti 1881. Voi silti olla sama henkilö, sillä ketään vuonna 1887 syntynyttä Helmi Heikkistä Katiha ei tunne.

Kirsti muistaa isänsä kertoneen, että ollessaan sota-aikana Tervaniemessä hän oli käynyt tapaamassa äitiään Viipurissa. "Äiti avasi oven 'silkissä ja sametissa'. Isä kysyi, onko rouvalla Keijo-nimistä poikaa niin äiti vastasi että ei ole. Myöhemmin joskus tapasivat Helsingissä ja kuulemma äiti olisi halunnut kouluttaa isän ym. mutta isä oli sanonut että ei käy kun et ennenkään ole minusta välittänyt."

Arkistojälkiä

Saksalaisperäinen sotilas Viipurista Keijon biologisena isänä saattaa olla vain Helmin keksimää tarinaa, sillä hän oli Lahdessa vielä vuonna 1907 miehensä suutari Antti Juho Heikkisen ja poikalapsensa kanssa[7]. Henkikirjan mukaan koti oli aivan kauppatorin tuntumassa neljännen korttelin tontilla no 10, silloinen Nikolainkatu, nykyinen Vapaudenkatu 4. Siellä oli silloin kolme rakennusta, uusi iso asuinrakennus vuodelta 1903 [8].

Heikkisten koti 1907 [9].



Helmi oli vihitty 8.3.1906 Nilsiässä syntyneen suutarin **Antti Juho Heikkisen** kanssa. Antti oli leskimies, sillä hänen edellinen 29.11.1902 vihitty vaimonsa Hilma Sofia Majanen oli kuollut lapsettomana. Perheessä oli Helmin avioton poika **Onni Olavi**, s. 19.8.1904 Helsingissä [10]. Antti ei ollut mikä tahansa rajasuutari tai pienkäsityöläinen, sillä hän maksoi vuonna 1907 kunnallisveroa 3000 markkaa [11] . Työmies maksoi silloin veroa 600 markkaa, konttoriristi 1800 markkaa, sahanhoitaja 4500 ja kruununvouti 8000.

Velkarahalla Antti kuitenkin ilmeisesti toimi, sillä marraskuulla 1907 nahkuri ja talonomistaja Wirtanen anoi oikeudelta, että ”Heikkisen omaisuus otettaisiin talteen ja määrättäisiin käytettäväksi – – saamamiesten tyydyttämiseksi”, sillä ”Heikkinen salaisesti oli poistunut kotoaan jättämättä – – omaisuutta, joka vastaisi – – saatavaa” [12]. Hakemuksessa Anttia nimitettiin suutariksi ja jalkinekauppiaaksi. Helmi taisi jo tuntea miehensä ja näki, mitä oli tulossa, sillä samassa yhteydessä hän anoi raastuvanoikeudelta pesäeroa miehestään ollakseen joutumatta vastaamaan tämän veloista.

Muistiedon mukaan ”Antti karkasi sihteerinsä kanssa” Amerikkaan. Päämääränä oli 1930-luvun rippikirjan mukaan Kanada. Antin myöhemmistä vaiheista ei ole tietoa. Viipurin kaupunkiseurakunnan rippikirjan mukaan hänet julistettiin kuolleeksi raastuvanoikeuden päätöksellä 1945. Kuolinpäiväksi määrättiin 1.1.1955.

Antin konkurssia käsiteltiin useilla käräjillä, osittain senkin takia, että velkojien kuuleminen [13]

Konkurssi- ja velkomis-asioita.

Lopputili räätäliliike ja kangaskauppa **Henttinen & Suomisen** konkurssipesän hoidosta on nähtävänä alkaen ensi Toukokuun 1 päivästä asianajo- ja liiketoimisto Aurasen & Mestertonin konttorissa täällä, josta päivästä lukien myös velkojat ovat tilaisuudessa alkuperäisten saamistodistusten esittämistä vastaan nostamaan pesästä tulevan ensimmäisen ja viimeisen osingon 6,5 %. Lahti, Huhtikuun 8 p:nä 1909.

Ernst G. Mesterton.

2487(3—3) Toimitsija.

Lopputili maasta poistuneen suutari **A. J. Heikkisen** konkurssipesän hoidosta on nähtävänä alkaen ensi Toukokuun 1 päivästä asianajo- ja liiketoimisto Aurasen & Mestertonin konttorissa täällä, josta päivästä lukien myös velkojat ovat tilaisuudessa alkuperäisten saamistodistusten esittämistä vastaan nostamaan pesästä tulevan ensimmäisen ja viimeisen jako-osingon 2,08 %. Lahti, Huhtikuun 8 p:nä 1909.

Ernst G. Mesterton.

2488(3 – 3) Toimitsijamies.

Suomen virallisen lehden numero 86 (16.4.1909) vei aikaa. Esimerkiksi Hollolan kihlakunnan välikäräjien 30.4.1908 pöytäkirjan 4. pykälä käsittää kaikkiaan 11 sivua. Muilla käräjillä käsittelyä ei useinkaan ole kirjattu pöytäkirjaan, vaan pykälän kohdalla on vain maininta ”selonteko erikseen”. Asiakirjat on koottu yhteen vihkoon [14]. Se ei ole ihan ohut, sillä siinä on 66 täysikokoista sivua ja lisäksi kymmenittäin pienikokoisia valtakirjoja, laskuja, kuitteja sekä vekseleitä. Tuomio julistettiin vasta 26.6.1908.

Helmi oli ottanut muuttokirjan Helsinkiin huhtikuulla 1908, mutta asian loppuselvittelyt veivät aikansa. Konkurssivihkoon[14] sisältyvän pesäluettelon Helmi on allekirjoittanut vasta 12.11.1908. Siinä luetellaan kaikki omaisuus koti-irtaimistoa myöten, muun muassa ”piironki tualettineen, kirjoituspöytä, sohva ja tyyny, keinutuoli, komuudi astioineen, pyyhinliinakannatin” jne. Ammatinharjoittamiseen liittyvää tavaraa on yllättävän paljon, esimerkiksi 7 paria miesten ”bocxnahkakenkiä” [box calf -nahka on nuoren vasikan nahkaa], 11 paria naisten ”gipsnahkakenkiä”, 29 paria varrellisia kangaskenkiä ja 32 paria tallukoita. Pesässä oli varoja 4 194 markkaa ja velkoja 28 497 markkaa.

Helsinkiin ja kuritushuoneeseen

Muuttaessaan Helsinkiin Helmi ei tullut outoon paikkaan, sillä olihan jo Onni syntynyt siellä. Helmin veli Anton Simberg oli muuttanut sinne vuonna 1907. Toinen veli, joka oli seppä ja isänsä täyskaima Juho Ebenh. Simberg, muutti sinne vaimonsa ja tyttärensä kanssa huhtikuussa 1910. Samoin sisar Eufemia vuonna 1914 tai 1915. Olipa Helmin muutto tapahtunut todellisuudessa milloin tahansa, niin hyväksi se ei hänen elämälleen ollut. Seuraava avioton lapsi Keijo syntyi jo helmikuun lopulla 1909 Helsingissä. Helmi oli niin liikkuvaa sorttia, että on vaikea arvailla, missä Keijo sai alkunsa.

Poliisilaitoksen osoitekortistossa[15] Helmistä on ensimmäinen merkintä vasta 28.2.1912 ”kenkäkauppiaan vaimo, förr Oravais, Köpmansg. 8–10”, siis Kauppiaankatu Katajanokalla. Asuinpaikka vaihtui usein, jopa parikin kertaa vuodessa; useimmat kantakaupungin lähistöllä Punavuoressa ja Kampissa, mutta myös Verkkosaaressa Söörnäisten takana ja alkuvuodesta 1915 Kalliossa IV linjalla.

Viimeksi mainitun asuinpaikan valintaan on todennäköisesti vaikuttanut se, että Helmin sisko Eufemia Kustaava Enckel s. 30.10.1876 oli muuttanut Helsinkiin ja ryhtynyt pitämään kahvilaa Kalliossa. Hän oli Kärkölän telefonikeskusaseman hoitajan Juho Alfred Enckelin leski ja hoitanut asemaa miehensä kuoleman jälkeen vuoteen 1914.

Seuraavan kerran tavoitamme Helmin 1916 Helsingin kaupungin raastuvanoikeudesta varkaudesta syytettynä. Virkatodistuksen syyttämistä varten oli antanut Helsingin eteläisen suomalaisen seurakunnan kirkkoherranvirasto. Viipurin maaseurakunnassa syntynyt ja siellä kirjoilla oleva **Reinhold Eliaksenpoika Kukkonen** kertoi raastuvanoikeudessa maaliskuussa 1916 asuneensa yhdessä Helmin kanssa[16]. Joulukuussa 1915 he olivat yksissä tuumin varastaneet Kalliossa sijainneen kahvilan takahuoneen lukitusta piironginlaatikosta rahaa 230 markkaa ja yhden ruplan.

Varkaus oli käynyt niin, että kahvilanpitäjä Eufemia Enckell, siis Helmin sisko, oli lähtenyt ”tuttavansa kanssa elävien kuvien teatteriin” ja jättänyt Helmin kahvilaa hoitamaan. Sinä aikana Helmi ja Reinhold veivät oikeuden käsityksen mukaan rahat, vaikka Reinhold kielsi olleensa tietoinen koko varkaudesta. Rahat hän kertoi voittaneensa korttipelissä.

Helmi ja Reinhold oli vangittu Lahdessa jo joulukuulla. Asiaa käsiteltiin kaikkiaan kuudessa raastuvanoikeuden istunnossa 26.1., 9.2., 24.2., 26.2., 1.3. ja 22.3. Juttua siirrettiin aina seuraaviin istuntoihin muun muassa siksi, että Reinholdia ei saatu paikalle, kun hänen aikaisempia rikoksiaan koskevat asiakirjat eivät olleet tulleet Viipurista, tai kun asianomistaja Eufemia Enckell ei tullut paikalle. Jos tavallisten ihmisten tavallisen elämän kirjaamiseen olisi käytetty aikanaan sadasosakaan siitä työ- ja sivumäärästä, mitä yhden varkauden selvittelemiseen käytettiin, niin tietäisimme esivanhemmistamme todella paljon. Esimerkiksi ensimmäisen käsittelyn pöytäkirjaa [17] on liitteineen parikymmentä sivua, mukana kahdeksan todistajan virkatodistukset.

Helmi tuomittiin maaliskuun lopulla ”ensikertaisesta varkaudesta sisältävä törkeän varkauden pidettäväksi yhdeksän kuukautta kuritushuoneessa ja olemaan kansalaisluottamusta vail-


VIRKATODISTUS

v. 1916

Helmi Aleksandra Heikkinen

21. 10. 1881 Kärkölä

Helsingissä, Tammi kuun 10 p:nä 1916.

la kolme vuotta yli vapausrangaistuksen ajan. – – Helmi Aleksandra Heikkinen ja Reinhold Kukkonen passitetaan takaisin lääninvankilaan enempää laillista toimenpidettä varten”[11]. Helsingin kruununvankilan vankiluettelon mukaan Helmi lähetettiin suorittamaan rangaistusta Hämeenlinnan kuritushuoneeseen. Siellä hänet kirjattiin saapuneeksi 28.3.1916 ja vapautuneeksi 24.12.1916 [18] .

Viipuriin

Vankeudesta vapautumisen jälkeen Helmi ei ehkä palannutkaan Helsinkiin, vaan siirtyi Viipuriin, missä hän oli ainakin jo vuonna 1918 niin kuin edellä mainittiin. Tähän vaikuttivat ehkä osaltaan Reinhold Kukkosen viipurilaisjuuret. Tämä oli nimittäin syntynyt Viipurin maalaiskunnassa 24.7.1893 ja kuoli siellä 16.3.1920, ammatiksi merkitty torvensoittaja. Helmi mainitaan Viipurin osoitekortistossa[19] vuosina 1921 ja 1926 tarjoilijana, mikä vahvistaa puheet teehuoneesta, sekä vuosina 1927 ja 1936–1937 hierojana; 1939 vain rouva.

Vuosina 1925–1929 Helmi ilmoitti hierojantoimestaan Karjala-lehdessä lähes sata kertaa yhteisilmoituksessa muiden hierojien ja sairasvoimistelijoiden kanssa. Ilmoituksista voi seurata hyvin hänen asuinpaikkojaan. Vuonna 1925 hän asui Katariinankatu 12:n asunnossa 4, sitten useammassa paikassa ja vuonna 1929 taas samassa asunnossa Katariinankadulla sekä osoitekortiston mukaan ainakin vuodesta 1935 vuoteen 1939 Piispankatu 16:n asunnossa 6.

Talvisodan jälkeen hänet on merkitty Helsingin poliisilaitoksen osoitekortistoon[15] huhtikuussa 1940 tulleeksi Kärkölästä. Toisesta evakkotiestä ei ole tarkkaa tietoa, mutta joulukuussa 1948 hän oli taas Helsingissä[15] asuinosoitteena Pohjoinen Esplanadikatu 37 A 35, leski, työl[äinen], tullut Leppävirralta. Kirsti kuoli Helsingissä 17.6. 1949 [20] . Kuolinmerkinnässä ammattina on sairaanhoitaja.

Spekulointeja syntyperästä

Isänäidilläni Henrika Gråstenilla s. 1864 oli seitsemän nuorempaa veljeä. Näistä kaksi kuoli lapsina ja nuorin 1892 syntynyt ei iältään oikein kelpaisi Helmin 1909 syntyneen toisen lapsen, Kirstin isän, isäksi. Neljä muuta asettuivat asumaan Rautalammille. Kylällä (Pukkiharju, Rautalampi) tiedetään kerrotun, että ainakaan ihan kaikki heistä eivät olleet vaelluksessaan täysin nuhteettomia. Niinpä esimerkiksi Taavetilla s. 1879 ”sanottiin olleen ennen avioliittoa maailmalla siitetty lapsi” [21] . Muistitiedon mukaan hänen tiedetään olleen Etelä-Suomessa ainakin Ruotsinpyhtäällä[22]. Veljesten vaiheita ei ole toistaiseksi seurattu tarkemmin.

Samoja geenejä oli liikkeellä muutenkin, sillä esimerkiksi veljesten serkku August Juhonpoika Gråsten s. 1870 muutti Haukivuorelta Viipuriin vuonna 1900. Katiha mainitsee hänet sekä Muolaassa että Viipurin maaseurakunnassa. Yhteys Helmiin ei näytä todennäköiseltä, sillä tämähän asui Helsingissä vielä 1910-luvun puolessa välissä.

Kirstin isoisän henkilöys on siis toistaiseksi arvelujen varassa. Dna-jäljet puhuvat kuitenkin enemmän isoisän suomalaisen kuin muistitiedon mukaisen saksalaisperäisen perimän puolesta.

Lähteitä:

1. Emma Mäkisen turvakoti. Kuva Helsingin kaupunginmuseo, CC-BY-4.0, https://hkm.finna.fi/Record/hkm.HKMS000005:km00303l
2. Nurmi, T. Elämää huutolaisina. Elämäkerrallinen tutkimus kahden huutolaislapsen elämästä. Pro gradu tutkielma,Turun yliopisto, kansatiede.
3. Kertomus Helsingin kaupungin kunnallishallinnosta 1909. Helsingin kaupungin tilastokonttorin julkaisema, no 22.
4. Tilli, K. Viipurilaisesta elämäntyylistä 1930-luvulla. Viipurin Suomalaisen Kirjallisuusseuran toimitteita 12, Helsinki 1998, s. 130.
5. Esimerkiksi Helsingin Sanomat 17.2.1928 no 47, s. 8
6. Kolari, P. Viipurin lääninhallituksen asiakirjoja, osa 3. Etelä-Karjala-instituutti, Lappeenranta,2013., osoitteessa https://www.lut.fi › documents › Arkistoluettelo3.pdf
7. Lahden kaupungin henkikirja 1907, kortteli 4, tontti 10 (torin luoteispuolella, nykyinen Rauhankatu 17).
8. Tupala, U. Kun Lahti rakennettiin. Lahden kaupunki 1995, s. 30.
9. Kuva: Heikki Puuperä, 1974. Lahden kaupunginmuseon kuva-arkisto (Finna CC BY-ND 4.0), https://www.finna.fi/Search/Results?lookfor=LAHTI+puuper%C3%A4
10. Hollolan seurakunnan rippikirja 1900–1909
11. Kunnallistaksoitus Lahden kaupungissa vuonna 1907. Lahti 12.02.1907 no 25, s. 2
12. Hollolan tuomiokunnan välikäräjät 27.1.1908. Hollolan tuomiokunnan kihlakunnanoikeuden tuomiokirjat 1908. Kansallisarkisto, Hämeenlinna, Cc:44.
13. Suomalainen Wirallinen Lehti 27.2.1908 no 48, s. 3 ja 28.3.1908 no 73, s. 6.
14. Suutari Anders Johan Heikkisen konkusrssi. Hollolan tuomiokunnan arkisto, konkurssiasiakirjat Ed:29, vihko 11/1907. Kansallisarkisto, Hämeenlinna.
15. Helsingin kapungin poliisilaitoksen osoiterekisteri, Helsingin kaupunginarkisto: https://yksa.disec.fi/Yksa4/id/142917568931100/#tab/basic, mikrofilmi, ei digitoitu
16. Helsingin raastuvanoikeuden neljännen osaston istunto 22.3.1916, § 4. Helsingin raastuvanoikeuden tuomiokirjat, maalis-huhtikuu 1916, CbIV116. Kansallisarkisto.
17. Helsingin raastuvanoikeuden neljännen osaston istunto 26.1.1916, § 5. Helsingin raastuvanoikeuden tuomiokirjat, tammi-helmikuu 1916, CbIV115. Kansallisarkisto.
18. Tutkija Juho Mattilan sähköpostiviesti kirjoittajalle 14.1.2020.
19. Viipurin kaupungin osoitekortiston mikrofilmit. Kansalliskirjasto.
20. Viipurin tuomiokirkkoseurakunnan arkisto - Kuolleiden ja haudattujen luettelot 1941-1949 (I Fa:11), jakso 191; Kansallisarkisto: http://digi.narc.fi/digi/view.ka?kuid=2206380 / Viitattu 3.11.2019 .
21. Eero Lindsbergin sähköpostiviesti kirjoittajalle 4.11.2019.
22. Eero Lindsbergin sähköpostiviesti kirjoittajalle 9.12.2019.


kuva Robert Seger

Olemme varanneet 50 lippua
Lahden kaupunginteatterin

Saituri

näytelmään

12. joulukuuta

klo 13.00-15.40

Katso tarkemmat ohjeet kotisivuiltamme
ja ilmoittaudu.

Lahden seudun sukututkijat ry käynnistää Päijät-Hämeen pitäjien talojen

isäntäluettelot-hankkeen.

Hanke käynnistyy la 05.12.2020 klo 10-14 kaikille kiinnostuneille järjestettävällä koulutuksella toimitiloissamme osoitteessa Väinämöisentie 2A Lahti.
Kouluttajana toimii FT Kari-Matti Piilahti.
Päivän aikana on tarkoitus perehtyä isäntäluetteloihin ja antaa vinkkejä niiden laatimiseen. Koulutuspäivässä keskitytään luetteloiden sisällölliseen puoleen, ei niinkään tekniseen koostamiseen.

Katso tarkemmat tiedot
https://lahdenseudunsukututkijat.com/wordpress

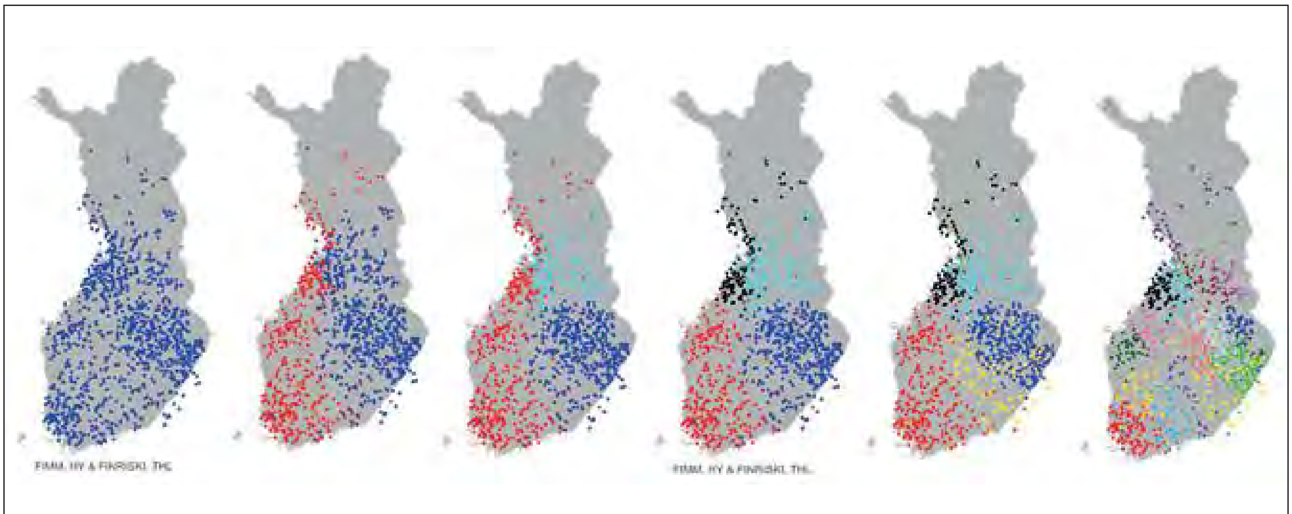
Hannu Korhonen, Orimattila

Tutkimus suomalaisten sukutaustasta

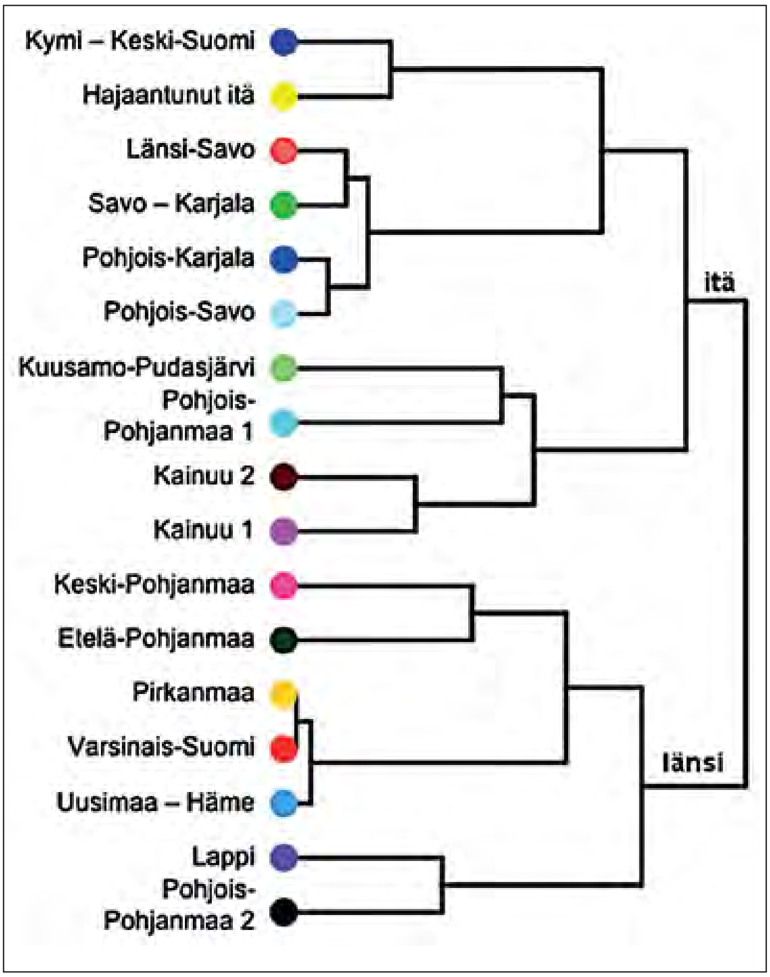
Kansallinen FINRISKI-tutkimus on väestötutkimus kroonisten tarttumattomien tautien riski- ja suojatekijöistä suomalaisessa väestössä. Sitä on tehty useilla nimillä vuodesta 1972 lähtien viiden vuoden välein [1]. Nykyinen nimi otettiin käyttöön vuonna 1992. Vuonna 2017 se yhdistettiin FinTerveys-väestötutkimukseen Tutkimusta koordinoi Terveyden ja hyvinvoinnin laitoksen Kansanterveysratkaisut-osasto. Tutkimuksessa koottuja aineistoja hyödynnetään jatkuvasti geneettisten sairauksien ja ominaisuuksien tutkimuksessa.

Sukututkijoita kiinnostavaksi tämän terveystutkimuksen tekevät sen aineistojen antamat mahdollisuudet suomalaisten perimän selvittämiseen. Suomeen on vuosisatojen saatossa muodostunut geneettisen tutkimuksen kannalta täysin ainutlaatuisia piirteitä pienen perustajajoukon ja vahvan geneettisen eriytymisen johdosta. Ensimmäisiä tutkimustuloksia Suomen väestön geneettisestä hienorakenteesta julkaistiin vuonna 2017 [2]. Tutkimusaineisto koostui 1 042 henkilön tiedoista. Analyysi perustui yli 300 000 snippiin (SNP). Menetelmiä on selostettu tarkemmin tieteellisessä tutkimusartikkelissa[3].

Tutkittavien vanhemmat ovat syntyneet alle 80 kilometrin etäisyydellä toisistaan. Kartalle heidät on sijoitettu heidän vanhempiensa syntymäpaikkojen keskiarvon osoittamaan kohtaan (kuva 1). Itä- ja länsisuomalaiset erottuvat toisistaan, kun tutkimusjoukko jaetaan kahteen ryhmään, joissa kummassakin henkilöt ovat perimältään samankaltaisempia keskenään kuin toisen ryhmän henkilöihin verrattuina. Erottelua jatkettaessa itäsuomalaiset jakautuvat pohjoiseen ja eteläiseen ryhmään, sitten länsisuomalaiset samoin. Tutkimusjoukko on jaettu tällä tavalla kaikkiaan 17 ryhmään. Kussakin vaiheessa jakautuu kahtia se alapopulaatio, joka sisältää kaksi toisistaan selvimmin erottuvaa ryhmää. Ryhmien geneettistä etäisyyttä voidaan kuvata päätöspuulla (kuva 2).



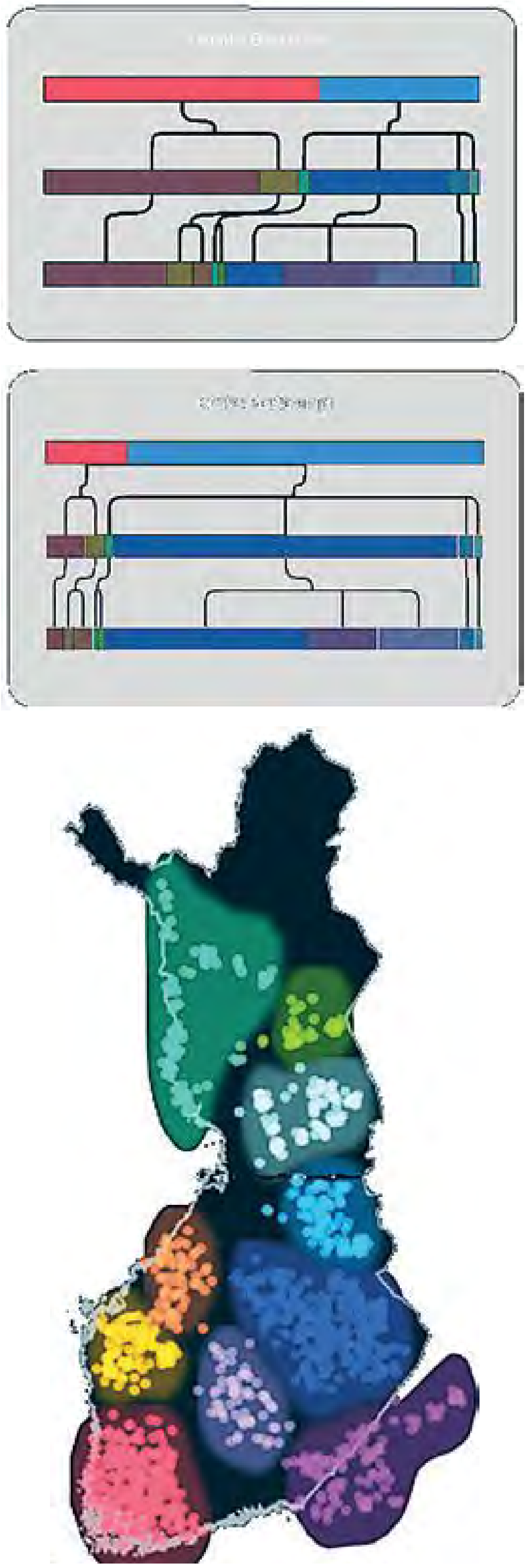
Kuva1: 1042 tutkimushenkilön sijoittuminen kartalle vanhempien syntymäpaikan mukaan (vasen kuva). Ensiksi erottuvat itä- ja länsisuomalaiset (toinen kuva vasemmalta). Toiseksi itäsuomalaiset jakautuvat pohjoiseen ja eteläiseen ryhmään (kolmas kuva vasemmalta), sitten länsisuomalaiset vastaavasti (kolmas kuva oikealta). Oikeanpuoleisessa kuvassa tutkimusjoukko on jaettu 17 ryhmään. (Lähde[2], CC-BY 4.0)



Kuva 2: Ryhmien geneettistä etäisyyttä kuvaava päätöspuu. Jakamaton ryhmä on kuvan oikeassa reunassa. Kukin ryhmä jakaantuu kahteen osaan edettäessä oikealta vasemmalle. (Lähde[2], CC-BY 4.0)

Kuva 3: Orimattila (punainen) ja Rautalampi (sininen) kartalla, joka näyttää lähialueen, jonka asukkailla on samaa sukutaustaa. (Lähde[4], CC-BY 4.0)

Vuonna 2021 tekijät julkaisivat jatkotutkimuksen[4], jossa he selvittivät 18 000:n, vuosina 1923–1987 syntyneen suomalaisen sukutaustoja. Sukutaustalla tarkoitetaan tässä yhteisiä esivanhempia. Ilmeinen hankaluus on se, että esivanhempien dna-näytteitä ei yleensä ole saatavissa. Sukutaustaa voidaan kuitenkin arvioida tilastollisilla menetelmillä. Tämä perustuu siihen, että etsitään geneettisiä yhteneväisyyksiä tutkittavan yksilön ja maantieteellisesti tarkkaan valittujen verrokkiryhmien välillä. Näin suuri tutkittavien määrä antaa mahdollisuuden tarkastella sukutaustaa kunnittain. Kartat näyttävät kunnan lisäksi myös sen lähialueen, jonka kuntien asukkailla on samanlainen sukutausta (kuva 3).



Kuva 4: Orimattilan (ylin kuva) ja Rautalammin (keskimmäinen kuva) asukkaat jaettuina sukutaustansa mukaan länsi- ja itäsuomalaisiin (ylin rivi) sekä kuuteen ja kymmeneen ryhmään (alin rivi). Jopa puolella rautalampilaisista on vielä sittenkin yhteinen sukutausta, toisin sanoen yhteisiä esivanhempia, kun vastaava osuus on Orimattilassa vain vähän runsas neljännes. (Lähde[4], CC-BY 4.0).

Esimerkkikunnista orimattilalaisten sukutausta on 60-prosenttisesti länsisuomalaista, kun se on Rautalammilla 80-prosenttisesti itäsuomalaista (kuva 4). Kun väestö jaetaan geneettisen sukutaustansa perusteella 10 ryhmään, niin suurimpaan ryhmään kuuluu Orimattilassa runsas neljännes ja Rautalammilla noin puolet. Se tarkoittaa sitä, että puolella rautalampilaisista on yhteisiä esivanhempia, kun tämä osuus on Orimattilassa vain neljännes.

Tutkimuksessa on tarkasteltu myös sukutaustaosuuksien muuttumista 1900-luvulla. Analyysin osuvuutta kuvaa esimerkiksi se, että muutoskäyristä näkyy selvästi evakkoväestön siirtyminen luovutetun Karjalan alueelta muualle Suomeen. Suurimmat muutokset ovat tapahtuneet Etelä-Suomessa niin kuin arvata saattaa. Tutkimuksen menetelmiä ja tulosten yksityiskohtia on selostettu tarkemmin englanninkielisessä tieteellisessä artikkelissa [5].

Lähteet:

1 *FINRISKI-tutkimuksen aineistot https://aineistokatalogi.fi/catalog/studygroups/e2d76eba-c8de-491e-9b00-ac3483811567*

2 *Suomen geneettinen hienorakenne ennen 1950-lukua https://www.mv.helsinki.fi/home/mjxpirin/finpopgen/finpopgen2017_fi.html, viitattu 8.8.2021*

3 *Kerminen, S. ym. (2017): Fine-Scale Genetic Structure in Finland https://academic.oup.com/g3journal/article/7/10/3459/6027487*

4 *Kerminen, S. (2021): Geneettisen sukutaustan muutoksia 1900-luvun Suomessa https://geneviz.aalto.fi/genetic_ancestry_finland/, viitattu 8.8.2121.*

5 *Kerminen, S. (2021): Changes in the fine-scale genetic structure of Finland through the 20th century. PLOS Genetics, March 4, 2021 https://journals.plos.org/plosgenetics/article?id=10.1371/journal.pgen.1009347 , viitattu 8.8.2021*